Correction DM3

Exercice 1 (inspiré d'eml 2017)

1)a)f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ (comme différence de deux fonctions de classe C^2). Elle est donc dérivable deux fois sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$, on a :
$f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$ et $f''(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}$.

1)b)$\forall x>0, f''(x)>0$ donc f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x-1}=e^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Par différence, $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=+\infty$.

2)Le tableau de variations de f' donne f' négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

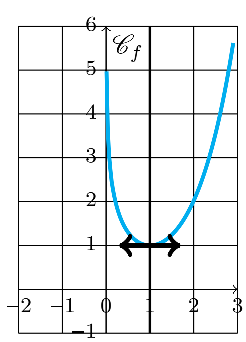
$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x-1}=e^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Quand $x\to+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ FI $+\infty-+\infty$. On écrit : $f(x)=x\left(e^{-1}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Par cc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-1}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3)



Exercice 2

1)$v_1 = (1,0,0,0)$, $v_3 = (0,0,1,0)$.

Les 1ères et 3èmes colonnes de B donnent : $v_2 = (1,1,0,1)$ et $v_4 = (-1,1,0,0)$.

2)a)$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2)b)La méthode de Gauss donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme P est inversible,on déduit que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

3)La formule de changement de base pour les endomorphismes donne :

$C = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4)$\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f \circ f) = [\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f)]^2 = C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(-\mathrm{Id})$.

Donc $f \circ f = -\mathrm{Id}$

5)Supposons qu'il existe un réel λ et un vecteur u non nul de $\mathbf{R}^4$ tels que

$$f(u) = \lambda u \qquad \text{(H)}$$

On obtient alors successivement :

$f\big(f(u)\big) = f(\lambda u)$

$(f \circ f)(u) = \lambda f(u)$ par déf. de la composée et par linéarité de f

$-\mathrm{Id}(u) = \lambda(\lambda u)$ grâce à 4) et (H)

$-u = \lambda^2 u$

$\left(\lambda^2 + 1\right) u = 0$

$u = 0$ car $\lambda^2 + 1 \neq 0$.

On obtient une contradiction car on avait supposé u non nul.

En conclusion, il n'existe pas de réel λ et de vecteur u non nul de $\mathbf{R}^4$ tels que $f(u) = \lambda u$.