
Exercice 1 (eml 2012)

Partie I :

1) λ est valeur propre de B $\iff B - \lambda I$ n'est pas inversible $\iff \det(B - \lambda I) = 0$ $\iff (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \times 1 = 0$ $\iff \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$ $\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 4.$ Donc $sp(B) = \{1, 4\}.$ $E_1(B) = \{U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid (B - I)U = 0\}.$ Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$ $(B - I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + 2y = 0$ $\iff x = -2y.$ Donc $E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = -2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$ $E_4(B) = \{U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid (B - 4I)U = 0\}.$ Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$ $(B - 4I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $\iff x = y.$ Donc $E_4(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$ $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ admet deux valeurs propres différentes.Donc B est diagonalisable.2) B est diagonalisable. On peut donc l'écrire sous la forme $B = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible dont les colonnes sont formées d'une base de vecteurs propres de B et D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de B .On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

✓ On a pris $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right)$ comme base pour $E_1(B)$, ce qui est légitime car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$3) D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } 5D - 4I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Donc $D^2 = 5D - 4I$.

On déduit :

$$\begin{aligned} B^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^2P^{-1} \\ &= P(5D - 4I)P^{-1} \\ &= 5PDP^{-1} - 4PIP^{-1} \\ &= 5B - 4I. \end{aligned}$$

4) L'égalité précédente donne :

$$B^2 - 5B = -4I, \text{ puis } B(B - 5I) = -4I \text{ et } B \left(-\frac{1}{4}(B - 5I) \right) = I.$$

Donc B est inversible et $B^{-1} = -\frac{1}{4}(B - 5I)$.

Partie II :

1) Pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ , on a :

$$\begin{aligned} h(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N)B \\ &= (\lambda AM + AN)B \\ &= \lambda AMB + ANB \\ &= \lambda h(M) + h(N). \end{aligned}$$

De plus, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ donc $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), h(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Donc h est « endo ».

Ainsi, h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2) Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque.

$$\begin{aligned} h(M) = N &\iff AMB = N \\ &\iff A^{-1}AMB B^{-1} = A^{-1}NB^{-1} \\ &\iff M = A^{-1}NB^{-1}. \end{aligned}$$

Les équivalences ci-dessus prouvent que toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ admet un unique antécédent par h .

Donc h est bijective et son application réciproque est :

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ N &\mapsto A^{-1}NB^{-1} \end{aligned}$$

✓ A est inversible car diagonale sans zéros sur la diagonale.
Quant à B , elle l'est par la question 1.4)

$$\begin{aligned}
3) a) h(M) = \lambda M &\iff AMB = \lambda M \\
&\iff AMPDP^{-1} = \lambda M \\
&\iff ANDP^{-1} = \lambda M \text{ car } MP = N \\
&\iff ANDP^{-1}P = \lambda MP \\
&\iff AND = \lambda N.
\end{aligned}$$

3) b) Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
AND = \lambda N &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x &= \lambda x \\ 4y &= \lambda y \\ -z &= \lambda z \\ -4t &= \lambda t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (1 - \lambda)x &= 0 \\ (4 - \lambda)y &= 0 \\ (-1 - \lambda)z &= 0 \\ (-4 - \lambda)t &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Distinguons plusieurs cas :

- $\lambda \notin \{-4, -1, 1, 4\}$
 $(0, 0, 0, 0)$ est alors l'unique solution du système et N est donc nulle.
- $\lambda = -4$
les solutions du système sont les quadruplets $(0, 0, 0, t)$ où $t \in \mathbf{R}$.
- $\lambda = -1$
les solutions du système sont les quadruplets $(0, 0, z, 0)$ où $z \in \mathbf{R}$.
- $\lambda = 1$
les solutions du système sont les quadruplets $(x, 0, 0, 0)$ où $x \in \mathbf{R}$.
- $\lambda = 4$
les solutions du système sont les quadruplets $(0, y, 0, 0)$ où $y \in \mathbf{R}$.

Conclusion :

Posons $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 4$.

$$\text{Posons } N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les équivalences précédentes donnent alors : $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $AN_i D = \lambda_i N_i$.

3)c) Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 , on a :

$$\begin{aligned} & \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 N_1 P^{-1} + \alpha_2 N_2 P^{-1} + \alpha_3 N_3 P^{-1} + \alpha_4 N_4 P^{-1} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\alpha_1 N_1 P^{-1} + \alpha_2 N_2 P^{-1} + \alpha_3 N_3 P^{-1} + \alpha_4 N_4 P^{-1}) P = 0 P \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 N_1 P^{-1} P + \alpha_2 N_2 P^{-1} P + \alpha_3 N_3 P^{-1} P + \alpha_4 N_4 P^{-1} P = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3 + \alpha_4 N_4 = 0. \end{aligned}$$

La famille (N_1, N_2, N_3, N_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ car elle est construite à partir de la base canonique en changeant l'ordre des vecteurs. Elle est donc libre.

On déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, ce qui prouve que la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est libre.

C'est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Son cardinal fait 4 et coïncide avec la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. C'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

d) La question 3)a) donne :

$$h(M_1) = -4M_1, h(M_2) = -1M_2, h(M_3) = 1M_3 \text{ et } h(M_4) = 4M_4.$$

$$\text{Donc } H = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(h) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & 3)e) \mathcal{M}_{\mathcal{E}}((h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e)) \\ & = (H - I)(H + I)(H - 4I)(H + 4I) \\ & = (H^2 - I)(H^2 - 16I) \\ & = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (h - e) \circ (h + e) \circ (h - 4e) \circ (h + 4e) = 0.$$

Exercice 2 (eml 2012)

Partie I :

1) f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit de deux fonctions continues.

De plus, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$ par croissances comparées.

Comme $f(0) = 0$ on a donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0)$, ce qui prouve la continuité à droite de f en 0.

On conclut que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2) f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit de deux fonctions de classe C^1 .

$$\forall t > 0, f'(t) = 1 \times \ln t + t \times \frac{1}{t} = \ln t + 1.$$

$$3) f'(t) \geq 0 \iff \ln t + 1 \geq 0 \iff \ln t \geq -1 \iff t \geq e^{-1}.$$

D'où le tableau de variations de f :

t	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(t)$		-	+
$f(t)$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty, \text{ par produit, } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

4) f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables et $\forall t > 0, f''(t) = \frac{1}{t} > 0$.

Donc f est convexe sur $]0, +\infty[$.

$$5) a) \forall t > 0, \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{t \ln t - 0}{t} = \ln t.$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t) - f(0)}{t} = +\infty.$$

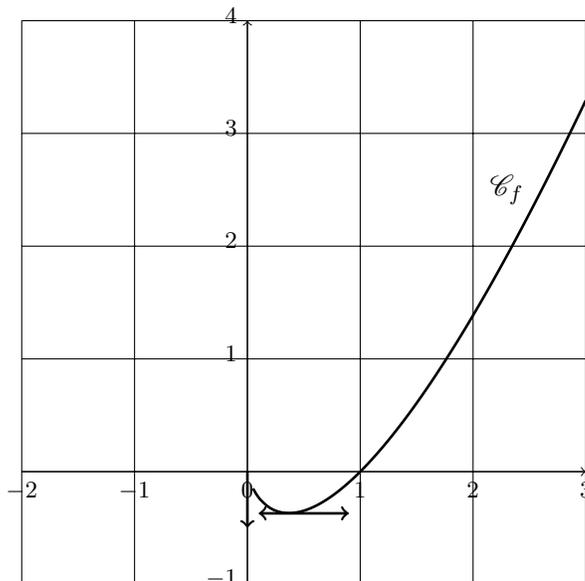
f n'est donc pas dérivable (à droite) en 0, sa courbe représentative Γ possède une demi-tangente verticale en 0.

$$5) b) \forall t > 0, f(t) = 0 \iff t \ln t = 0 \iff \ln t = 0 \iff t = 1.$$

Par ailleurs, $f(0) = 0$.

Les points d'intersection demandés sont donc $(1, 0)$ et $(0, 0)$.

5)c)



Partie II :

1) Pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, on a :

$$\partial_1 F(x, y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln y}{x^2} \text{ et } \partial_2 F(x, y) = -\frac{\ln x}{y^2} + \frac{1}{xy}.$$

$$2) \partial_1 F(e, e) = \frac{1}{e^2} - \frac{\ln e}{e^2} = 0 \text{ car } \ln e = 1,$$

$$\partial_2 F(e, e) = -\frac{\ln e}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0.$$

Donc (e, e) est un point critique de F .

$$3) \partial_{1,1}^2 F(x, y) = \partial_1 (\partial_1 F(x, y)) = \partial_1 \left(\frac{1}{xy} - \frac{\ln y}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2 y} + \frac{2 \ln y}{x^3},$$

$$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \partial_1 (\partial_2 F(x, y)) = \partial_1 \left(-\frac{\ln x}{y^2} + \frac{1}{xy} \right) = -\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{x^2 y},$$

$$\partial_{2,1}^2 F(x, y) = \partial_{1,2}^2 F(x, y) \text{ par le théorème de Schwarz, } f \text{ étant de classe } C^2,$$

$$\partial_{2,2}^2 F(x, y) = \partial_2 (\partial_2 F(x, y)) = \partial_2 \left(-\frac{\ln x}{y^2} + \frac{1}{xy} \right) = \frac{2 \ln x}{y^3} - \frac{1}{xy^2}.$$

La matrice hessienne de F au point (e, e) vaut :

$$\nabla^2 F(e, e) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 F(e, e) & \partial_{1,2}^2 F(e, e) \\ \partial_{2,1}^2 F(e, e) & \partial_{2,2}^2 F(e, e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/e^3 & -2/e^3 \\ -2/e^3 & 1/e^3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \lambda &\text{ est valeur propre de } \nabla^2 F(e, e) \\ \iff \nabla^2 F(e, e) - \lambda I &\text{ n'est pas inversible} \\ \iff \det(\nabla^2 F(e, e) - \lambda I) &= 0 \\ \iff \left(\lambda - \frac{1}{e^3}\right)\left(\lambda - \frac{1}{e^3}\right) - \left(-\frac{2}{e^3}\right)\left(-\frac{2}{e^3}\right) &= 0 \\ \iff \left(\lambda - \frac{1}{e^3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{e^3}\right)^2 & \\ \iff \lambda - \frac{1}{e^3} = -\frac{2}{e^3} \text{ ou } \lambda - \frac{1}{e^3} = \frac{2}{e^3} & \\ \iff \lambda = -\frac{1}{e^3} \text{ ou } \lambda = \frac{3}{e^3}. & \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\nabla^2 F(e, e)$ sont nulles et de signes contraires.
Donc F n'admet pas d'extrémum local en (e, e) , c'est un point selle.

Exercice 3 (eml 2012)

$$1) x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{t}{2a^2}}$ (en posant $t = x^2$ ou $x = t^{1/2}$)
 $= 0$ par croissances comparées.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge (intégrale de Riemann de paramètre } 2 > 1).$$

D'après le critère de négligeabilité sur les intégrales de fonctions positives,

$$\int_1^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \text{ converge.}$$

Enfin, $\int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ converge car $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est continue sur $[0, 1]$.

Par Chasles, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ est convergente.

2)a) Une densité d'une variable aléatoire Z qui suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

On a ici $m = E(Z) = 0$ et $\sigma = a$, ce qui donne : $f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ou

$$\text{encore } f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} a\sqrt{2\pi} f(x) dx \\ &= a\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= a\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ car } f \text{ est paire} \\ &= a\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} \times 1 \text{ car } f \text{ est une densité} \\ &= a\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

2)b) φ est dérivable sur \mathbf{R} comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) = -\frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} -a^2 \varphi'(x) dx \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t -a^2 \varphi'(x) dx \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-a^2 \varphi(x)]_0^t \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} (-a^2 \varphi(t) + a^2 \varphi(0)) \\
&= a^2.
\end{aligned}$$

En effet, $\varphi(0) = 1$. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^2}{2a^2} = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ donnent par composition : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$.

3)a) Soit $n \geq 2$, un entier et $t \geq 0$ un réel.

Effectuons une intégration par parties dans $\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ en posant :

$$\begin{aligned}
u(x) &= x^{n-1} & v'(x) &= x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = -a^2 \varphi'(x) \\
u'(x) &= (n-1)x^{n-2} & v(x) &= -a^2 \varphi(x).
\end{aligned}$$

u et v sont de classe C^1 sur \mathbf{R} donc sur $[0, t]$, l'intégration par parties est donc licite et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx &= [-a^2 x^{n-1} \varphi(x)]_0^t - \int_0^t -a^2 \varphi(x) (n-1)x^{n-2} dx \\
&= -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.
\end{aligned}$$

3)b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = 0$ par croissances comparées (par la même technique que la question 1).

En passant à la limite dans l'égalité 3)a), on déduit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$I_n = (n-1)a^2 I_{n-2}.$$

3)c) L'égalité précédente pour $n = 2$ et $n = 3$ donne :

$$I_2 = a^2 I_0 = a^2 \times a \sqrt{\frac{\pi}{2}} = a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ et } I_3 = 2a^2 I_1 = 2a^2 \times a^2 = 2a^4.$$

4) • $\forall x \in \mathbf{R}, g_a(x) \geq 0$.

• g_a est continue sur $]-\infty, 0]$ (fonction nulle) et continue sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.

Donc g_a est continue sur \mathbf{R} , sauf peut-être en 0.

- $\int_{-\infty}^0 g_a(x)dx$ converge et vaut 0 car g_a est nulle sur $]-\infty, 0]$.
 - $\int_0^{+\infty} g_a(x)dx$ converge car de même nature que l'intégrale convergente I_1
- et $\int_0^{+\infty} g_a(x)dx = \frac{1}{a^2}I_1 = \frac{1}{a^2} \times a^2 = 1$.

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx$ converge.

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx = \int_{-\infty}^0 g_a(x)dx + \int_0^{+\infty} g_a(x)dx = 0 + 1 = 1$.

On conclut que g_a est une densité.

5) La fonction de répartition G_a de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, G_a(x) = \int_{-\infty}^x g_a(t)dt.$$

On distingue deux cas :

- premier cas : $x < 0$
 g_a est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc sur $]-\infty, x]$. Donc $G_a(x) = 0$.
- second cas : $x \geq 0$

$$\begin{aligned} G_a(x) &= \int_{-\infty}^0 g_a(t)dt + \int_0^{+\infty} g_a(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt \\ &= 0 + \int_0^x -\varphi'(t)dt \\ &= [-\varphi(t)]_0^x \\ &= -\varphi(x) + \varphi(0) \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $G_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

6) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xg_a(x)dx$ est absolument convergente.

$\int_{-\infty}^0 |xg_a(x)|dx$ converge et vaut 0 car g_a est nulle sur $]-\infty, 0]$.

$\int_0^{+\infty} |xg_a(x)|dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ converge car de même nature que I_2 .

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} |xg_a(x)|dx$ converge.

Donc X admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg_a(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^0 xg_a(x)dx + \int_0^{+\infty} xg_a(x)dx \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \times I_2 \\ &= \frac{1}{a^2} \times a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= a \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

7) X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx$ converge.

$\int_{-\infty}^0 x^2 g_a(x)dx$ converge et vaut 0 car g_a est nulle sur $]-\infty, 0]$.

De plus, $\int_0^{+\infty} x^2 g_a(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ converge car de même nature que I_3 .

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx$ converge.

Donc X admet un moment d'ordre 2 donné par :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \times I_3 \\ &= \frac{1}{a^2} \times 2a^4 \\ &= 2a^2. \end{aligned}$$

La formule de Koëning donne enfin :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \left(a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 2a^2 - a^2\frac{\pi}{2} = \frac{(4-\pi)a^2}{2}.$$

8)a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, sa fonction de répartition F_U est donnée par :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(a\sqrt{-2\ln U} \leq x).$$

On distingue deux cas :

- premier cas : $x < 0$

Comme $a\sqrt{-2\ln U} \geq 0$, l'événement $(a\sqrt{-2\ln U} \leq x)$ est impossible. Donc $F_Z(x) = 0$.

- deuxième cas : $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P\left(\sqrt{-2\ln U} \leq \frac{x}{a}\right) \\ &= P\left(-2\ln U \leq \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= P\left(\ln U \geq \frac{x^2}{-2a^2}\right) \\ &= P\left(U \geq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \text{ par croissance de l'exponentielle} \\ &= 1 - P\left(U < e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \\ &= 1 - P\left(U \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \text{ car } U \text{ est à densité} \\ &= 1 - F_U\left(e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ car } e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \in]0, 1]. \end{aligned}$$

$$\text{On conclut que } F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On constate que X et Z ont la même fonction de répartition, elles suivent donc la même loi.

8)b)programme :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
a=float(input("entrer un réel a>0"))
U=rd.random()
Z=a*np.sqrt(-2*np.log(U))
print(Z)
```

9)a) A_n est une variable aléatoire fonction de X_1, \dots, X_n qui ne dépend pas de a , où (X_1, \dots, X_n) est un n -échantillon de X .

Donc A_n est un estimateur a .

$$\begin{aligned} E(A_n) &= E\left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + \dots + X_n)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(E(X) + \dots + E(X)) \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \times nE(X) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \times na\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= a. \end{aligned}$$

Donc A_n est un estimateur sans biais de a .

$$\begin{aligned} 9)b)V(A_n) &= V\left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + \dots + X_n)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\right)^2 V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(V(X_1) + \dots + V(X_n)) \text{ car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(V(X) + \dots + V(X)) \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \times nV(X) \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \times n\frac{(4-\pi)a^2}{2}. \\ &= \frac{(4-\pi)a^2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Comme A_n est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance.

10)a) Pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(M_n > t) &= P(X_1 > t \cap \dots \cap X_n > t) \\ &= P(X_1 > t) \cdots P(X_n > t) \text{ car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= P(X > t)^n \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X \\ &= (1 - P(X \leq t))^n \\ &= (1 - G_a(t))^n \\ &= \left(1 - (1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}})\right)^n \text{ car } t \geq 0 \\ &= e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}. \end{aligned}$$

10)b) La fonction de répartition F_{M_n} de M_n est définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, F_{M_n}(t) = P(M_n \leq t).$$

On distingue deux cas :

- premier cas : $t < 0$

$$\begin{aligned} P(M_n > t) &= (1 - G_a(t))^n \text{ en reprenant le calcul fait en 10)a)} \\ &= (1 - 0)^n \text{ car } t < 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où $P(M_n \leq t) = 1 - P(M_n > t) = 0$.

- deuxième cas : $t \geq 0$

La question 10)a) donne : $P(M_n \leq t) = 1 - P(M_n > t) = 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

$$\text{On conclut que } F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nt^2}{2a^2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

10)c) D'après la question 5), pour tout réel $b > 0$, on a :

$$G_b(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t^2}{2b^2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Posons $b = \frac{a}{\sqrt{n}}$. On a alors : $\forall t \in \mathbf{R}, F_{M_n}(t) = G_b(t)$.

F_{M_n} a donc les mêmes propriétés que G_b , elle est donc continue sur \mathbf{R} et de classe C^1 sur \mathbf{R} sauf peut-être en 0.

M_n est donc une variable aléatoire à densité et une densité de M_n est g_b .

10)d) En reprenant le calcul fait aux questions 6) et 7) avec $a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{n}}$, on obtient :

$$E(M_n) = \frac{a}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = a \sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

$$V(M_n) = \frac{(4 - \pi) \left(\frac{a}{\sqrt{n}} \right)^2}{2} = \frac{4 - \pi}{2n} a^2.$$

11)a) $B_n = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} M_n$ est un estimateur sans biais de a .

En effet , $E(B_n) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} E(M_n) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \times a \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = a$.

11)b) $V(B_n) = V \left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}} M_n \right)$

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \right)^2 V(M_n) \\ &= \frac{2n}{\pi} \times \frac{4 - \pi}{2n} a^2 \\ &= \frac{4 - \pi}{\pi} a^2. \end{aligned}$$

Comme B_n est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance.