DM7

à rendre le lundi / /

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = xe^x$.

1)a)Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

b)Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$.

On considère maintenant la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_0 = \alpha$ et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{2}U_n\right).$$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

2)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n$ existe et $U_n \geq 0$.

3)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n e^{-U_{n+1}} \quad (*)$

4)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

Indication : pour l'hérédité, utiliser $(*)$.

5)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \leq \frac{1}{2^n}$ puis préciser $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

6)Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} U_n$.

Exercice 2

Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ la suite d'intégrales définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx.$$

1)Calculer I_0.

2)Etablir que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

3)a)Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n$.

b)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4)a)A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$

b)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$.

c)Déterminer $\lim_{n\to+\infty} nI_n$. En déduire un équivalent simple de I_n en $+\infty$.