# DS3 ECG2 appliquées

## EXERCICE 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $E$, où $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.

On note, pour tout polynôme $P$ de $E$ :

$$a(P) = P - XP', \qquad b(P) = P - P', \qquad c(P) = 2XP - (X^2-1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

### Partie I : Étude de a

1. Montrer que $a$ est un endomorphisme de $E$.
2. (a) Montrer que la matrice de $A$ de $a$ dans la base $\mathcal{B}$ de $E$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer le rang de la matrice $A$.
3. L'endomorphisme $a$ est-il bijectif ?
   Déterminer une base de Ker($a$) et une base de Im($a$).

   On admet, pour la suite de l'exercice, que $b$ et $c$ sont des endomorphismes de $E$.
   On note $B$ et $C$ les matrices, dans la base $\mathcal{B}$ de $E$, de $b$ et $c$ respectivement.

### Partie II : Étude de $b$

4. Montrer que $b$ est bijectif et que, pour tout $Q$ de $E$, on a : $\quad b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
5. (a) Montrer que $b$ admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.
   (b) L'endmorphisme $b$ est-il diagonalisable ?

### Partie III : Étude de $c$

6. Montrer : $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme $c$ est-il bijectif ?
8. (a) Déterminer une matrice $R$, carrée d'ordre 3, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice $D$, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.
   (b) En déduire que l'endormophisme $c$ est diagonalisable et déterminer une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $c$.

### Partie IV : Étude de $f$

9. Montrer que $\quad \forall P \in E, \quad f(P) = P'$.
10. En déduire : $\quad (BA - AB)^3 = 0$.

## Exercice 2

Dans tout cet exercice, $f$ désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

### Partie I : Étude de la fonction $f$

**1.** Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

**2.** Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in ]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.

**3.** Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

### Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

**4.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.

**5.** Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

**6.** **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

**b.** En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

**7.** **a.** Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n)` prenant en argument un entier $n$ de $\mathbf{N}$ et renvoyant la valeur de $u_n$.

**b.** A l'aide de la fonction `suite`, compléter la fonction Python suivante prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif et renvoyant une valeur approchée de $b$ à `epsilon` près.

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=1
    while ................ :
        n=n+1
    return(..........)
```

### Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $\Phi$ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

**8.** Montrer que $\Phi$ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

**9.** En déduire les variations de $\Phi$ sur $]0,+\infty[$.

**10.** Montrer : $\forall x \in ]0,+\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

**11.** **a.** Montrer que $\Phi$ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore $\Phi$ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

**b.** Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet que la fonction $\Phi$ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

**12.** On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de $\Phi$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

## Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction $H$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U = ]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \quad H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

**13.** **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $H$ en tout $(x, y)$ de $U$.

**b.** Montrer que la fonction $H$ admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels $a$ et $b$ sont ceux introduits dans la question **2**.

**14.** **a.** Écrire la matrice hessienne, notée $M_a$, de $H$ au point $(a, \ln(a))$.

**b.** Montrer que $M_a$ admet deux valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1$ et $\lambda_2$, vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = a - 1. \end{cases}$$

**c.** La fonction $H$ présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$ ?

**15.** La fonction $H$ présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$ ?

## Exercice 3

On considère $\alpha$ entier strictement supérieur à 1 et on pose pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira $u_n$ au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. (a) Vérifier que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, le réel $u_n$ est bien défini et que $u_n > 0$.

   (b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2. (a) Grâce à une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\alpha\,(u_n - u_{n+1})$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$

3. En considérant $\ln(u_n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1} u_{n+1}$.

   (b) En déduire que $\forall n \geq 2,\ \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$.

   (c) A l'aide d'un développement limité d'ordre 1, donner un équivalent, lorsque $k$ est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

   (d) Conclure quant à la nature de la série de terme général $u_n$.