TD18 - convergences

Exercice 1 ★ ★ ☆☆

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

1)A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ P\big(|X-1| \geq \epsilon\big) \leq \frac{1}{\epsilon^2}.$$

2)En déduire que $P(X \geq 3) \leq \dfrac{1}{4}$.

3)Confirmer l'inégalité précédente en calculant la valeur de $P(X \geq 3)$.
(On donne $e^{-3} \approx 0,05$).

Exercice 2 ★ ★ ★☆

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$, φ une densité de X et Φ sa fonction de répartition.

1)Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(2\Phi(x)-1)\,.$$

2)A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, montrer que

$$\forall x > 0,\ P\big(|X| < x\big) \geq 1 - \frac{1}{x^2}.$$

3)Déduire des questions précédentes que

$$\forall x > 0,\ \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 3 (edhec 2010) ★ ★ ☆☆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que $X_n(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et de loi donnée par :

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{-1}{3}\right)\right)^n \text{ et } P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)\right)^n.$$

1)Pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k)$.

2)En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Exercice 4 (edhec 2012) ★ ★ ☆☆

Soient p et q des réels tels que $0 < p < 1$ et $q = 1-p$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes telles que $X_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et de loi donnée par :

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ P(X_n = k) = q^{k-1}p \text{ et } P(X_n = n) = q^{n-1}.$$

1)Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) = 1$.

2)Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Exercice 5 (edhec 2013) ★ ★ ☆☆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_n = min(X_1, ..., X_n)$.

1)Pour tout x réel, exprimer l'événement $(I_n > x)$ à l'aide des événements $(X_1 > x)$, ..., $(X_n > x)$.

2)On note F_n la fonction de répartition de I_n. Etablir que

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3)Soit I une variable aléatoire certaine, égale à 0, et F sa fonction de répartition.

a)Justifier que $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

b)Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers I.

Exercice 6 (eml 2014) ★ ★ ★☆

Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires telles que $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$ et de loi donnée par :

$$\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$

1)Montrer que $\forall k \geq 2,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

2)Montrer que la série $\sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

3)On admet qu'il existe une variable aléatoire Z telle que $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et de loi donnée par $\forall k \geq 2,\ P(Z = k) = \dfrac{k-1}{k!}$. Que prouvent les questions précédentes ?

Exercice 7 ★ ★ ★☆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).$$

On pose $M_n = max(X_1, ..., X_n)$ et $Y_n = n(1 - M_n)$.

1)Pour tout x réel, exprimer l'événement $(M_n \leq x)$ à l'aide des événements $(X_1 \leq x)$, ..., $(X_n \leq x)$.

2)On note F_n la fonction de répartition de M_n. Etablir que

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3)On note G_n la fonction de répartition de Y_n. De la question 2), déduire :

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

4)Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y.

Exercice 8 ★ ★ ☆☆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right).$$

On note F_n la fonction de répartition de X_n.

1)Déterminer l'expression de $F_n(x)$ pour tout réel x.

2)En distinguant les cas $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$, puis interpréter ces résultats.

Exercice 9 (eml 2006) ★ ★ ☆☆

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ Z_n \hookrightarrow \mathscr{G}(p).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la variable aléatoire, notée $\overline{X_n}$, appelée *moyenne empirique* de $(X_1, ..., X_n)$ par :

$$\overline{X_n} = \frac{Z_1 + \cdots Z_n}{n}.$$

1)Calculer $m = E\left(\overline{X_n}\right)$ en fonction de p.

2)Calculer $\sigma_n = \sigma\left(\overline{X_n}\right)$ en fonction de p, q et n.

3)A l'aide du théorème de la limite centrée, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(0 \leq \overline{X_n} - m \leq \sigma_n\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Exercice 10 (eml 2006) ★ ★ ☆☆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(1).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n = X_1 + \cdots X_n$ et $u_n = e^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!}$.

1)S_n suit une loi connue, laquelle ? Préciser $E(S_n)$ et $V(S_n)$ en fonction de n.

2)En utilisant S_n, exprimer u_n comme la probabilité d'un certain événement.

3)A l'aide du théorème de la limite centrée, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

Indications / Réponses

Exercice 1

2)Utiliser la question 1) avec $\epsilon = 2$.

3)$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \left(1 - e^{-3}\right) = e^{-3} \approx 0,05 < \frac{1}{4}$.

Exercice 2

1)$\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \int_0^x \varphi(t) dt = \cdots$

3)Commencer par prouver que $P\left(|X| < x\right) = 2\Phi(x) - 1$.

Exercice 3

1)$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 1/2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = 1/4$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = 1/4$.

2)Appliquer P1.

Exercice 4

1)Utiliser si besoin la formule $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

2)Voir que $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ où $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Exercice 5

1)$(I_n > x) = (X_1 > x) \cap ... \cap (X_n > x)$.

3)b)Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ en distinguant 3 cas : $x \leq 0$, $0 < x < 1$ et $x \geq 1$.

Exercice 6

2)La série est télescopique...

3)Utiliser P1.

Exercice 7

1)$(M_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap ... \cap (X_n \leq x)$.

3)Commencer par prouver que $\forall x \in \mathbf{R}$, $G_n(x) = 1 - F_n\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)$.

4)Prouver que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = F_Y(x)$.

Exercice 8

1)C'est du cours : $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nx & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$

2)On trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On conclut que $(X_n)_{n\geq1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X certaine et égale à 0.

Exercice 9

1)$m = \dfrac{1}{p}$ 2)$\sigma_n = \dfrac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$

Exercice 10

1)$S_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n)$, $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

2)$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = P(S_n \leq n)$.

3)$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} P(S_n - n \leq 0) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n^* \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$.