48 points - $\frac{40}{48}$ = 83% du sujet = $\frac{20}{20}$

DS1 – ECG2 – mercredi 20/09/2023

Exercice 1 : 8 points

On considère les matrices $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ et $J = A - I$

1)Montrer que A est inversible et calculer son inverse. 2,5

2)Calculer J, J^2, J^3 puis J^n pour tout $n \geq 3$ 2

3)Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$: $A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$ 2,5

4)Vérifier que l'égalité 3) reste vraie pour n= -1. 1

Exercice 2 (esc 1998 remanié) : 14 points

Soient les matrices : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On étudie l'ensemble $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = MA\}$

1)a)Vérifier que B appartient à E. 0,5

b)Soit $n \geq 0$ un entier quelconque. Justifier que A^n appartient à E. 0,5

2)Montrer que $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix} \text{ où } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ puis que E = Vect(I, A, B) 2+1

3)Montrer que (I, A , B) est une base de E. En déduire la dimension de E. 1,5+0,5

4)Soient $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

a)Calculer PQ. En déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} en fonction de Q. 1 + 1

b)Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ puis vérifier qu'elle est diagonale. 1

c)Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$: $A^n = PD^nP^{-1}$ 2

d)En déduire les coordonnées de la matrice A^n dans la base (I , A , B) de E. 2+1

Exercice 3: 13 points

Soient $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

1)a)Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. 1

b)Vérifier que $A = PDP^{-1}$ et $B = PEP^{-1}$ 1 + 1

2) Soit $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / AM = MB\}$

a)Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. 2

b)Montrer que $M \in F \iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E$ 2

c)Soit $X \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $DX = XE \iff X \in \text{Vect}(D)$ 2
[on pourra poser $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et résoudre le système $DX = XE$]

d)En déduire que F = Vect (A) . Quelle est la dimension de F ? 3 + 1

Exercice 4 : 13 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x - \ln(1 + x^2).$$

1)a)Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que 0,5

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$ 1

b)Déterminer la limite de f en $-\infty$. 1

c)Déterminer la limite de f en $+\infty$. 2,5

d)Dresser le tableau de variations de f. 1

2)a)Calculer $f''(x)$. 1,5

b)Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion dont on précisera les coordonnées. 2

3)Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en l'origine et aux points d'inflexion. On donne $\ln 2 \approx 0,7$. 1,5 + 2