
Exercice 1 (ecricome 2010)

Partie I :

1) Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on va transformer $M_a - \lambda I$ en une matrice triangulaire par les opérations de Gauss.

$$\begin{aligned} M_a - \lambda I &= \begin{pmatrix} a+2-\lambda & -(2a+1) & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ M_a - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ a+2-\lambda & -(2a+1) & a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{matrix} \\ M_a - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda(a+2-\lambda) + (2a+1) & -a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow (a+2-\lambda)L_1 - L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ M_a - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda(a+2-\lambda) + (2a+1) & -a \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ L_3 \longleftrightarrow L_2 \end{matrix} \\ M_a - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow (\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1))L_2 + L_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } Q(\lambda) &= (\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1)) \times (-\lambda) - a \\ &= (-\lambda^2 + (a+2)\lambda - (2a+1)) \times (-\lambda) - a \\ &= \lambda^3 - (a+2)\lambda^2 + (2a+1)\lambda - a. \end{aligned}$$

λ est valeur propre de M_a

$$\iff M_a - \lambda I \text{ n'est pas inversible}$$

$$\iff Q(\lambda) = 0$$

$$\iff \lambda \text{ est racine de } Q.$$

2) $Q(1) = 1 - (a+2) + (2a+1) - a = 0$ donc 1 est racine de Q .

3) 1 est racine de Q donc Q est multiple de $x-1$.

En effectuant la division euclidienne de Q par $x-1$, on trouve :

$$Q(x) = (x-1) \underbrace{(x^2 - (a+1)x + a)}_{R(x)}.$$

On remarque que $R(1) = 0$. Donc 1 est racine de R . On trouve l'autre racine en utilisant que le produit des racines vaut $a/1 = a$.

Ainsi, les racines de R sont 1 et a .

On a donc $R(x) = (x-1)(x-a)$, puis $Q(x) = (x-1)^2(x-a)$.

Si $a = 1$, alors Q admet 1 comme racine (triple).

Si $a \neq 1$, alors Q admet 1 et a comme racines.

4) D'après les questions précédentes, M_1 n'a que 1 comme valeur propre.

Raisonnement par l'absurde. Supposons M_1 diagonalisable. Alors, il existe P inversible et D diagonale telles que $M_1 = PDP^{-1}$ avec D qui porte en diagonale les valeurs propres de M_1 . On a alors $D = I$, ce qui mène à : $M_1 = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde. Donc M_1 n'est pas diagonalisable.

Partie II :

1) Pour tous réels x , y et z , on a :

$$\begin{aligned}
 xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 &\iff x(a^2e_1 + ae_2 + e_3) + y(e_1 + e_2 + e_3) + z(2e_1 + e_2) = 0 \\
 &\iff (a^2x + y + 2z)e_1 + (ax + y + z)e_2 + (x + y)e_3 = 0 \\
 &\iff \begin{cases} a^2x + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{par liberté de la famille } (e_1, e_2, e_3) \\
 &\iff \begin{cases} (-a^2 + 1 + 2(a - 1))y = 0 \\ z = (a - 1)y \\ x = -y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -(a - 1)^2y = 0 \\ z = (a - 1)y \\ x = -y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 1
 \end{aligned}$$

Donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre. Son cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de E . Donc $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .

2) Soit U_1 le vecteur colonne de e'_1 dans $\mathcal{B}$.

Le vecteur colonne de $f_a(e'_1)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$M_a U_1 = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = aU_1.$$

Donc $f_a(e'_1) = ae'_1$.

3) Soient U_1 et U_2 les vecteurs colonnes respectifs de e'_1 et e'_2 dans $\mathcal{B}$.

Le vecteur colonne de $f_a(e'_2)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$M_a U_2 = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U_2.$$

Donc $f_a(e'_2) = e'_2$.

Le vecteur colonne de $f_a(e'_3)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$M_a U_3 = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = U_2 + U_3.$$

Donc $f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

4) Des questions 2) et 3), on déduit :

$$T_a = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\ll T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gg$.

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : $\ll T_a^0 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gg$. Vrai car $a^0 = 1$ et $T_a^0 = I$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} T_a^{n+1} &= T_a^n T_a \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{par HR} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie III :

$$\begin{aligned} 1) M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Soit } \mathcal{P}(n) \text{ la proposition : } \ll \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \gg.$$

$$\mathcal{P}(0) : \ll \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P_2 T_2^0 P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \gg. \text{ Vraie car } P_2 T_2^0 P_2^{-1} = P_2 I P_2^{-1} = I.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} &= M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{d'après III.1)} \\ &= M_2 P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \text{par HR} \\ &= P_2 T_2 P_2^{-1} P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \text{par la formule de changement de base} \\ &= P_2 T_2^{n+1} P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

3) On a ici $a = 2$ donc $e'_1 = 4e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $e'_3 = 2e_1 + e_2$.

On déduit $P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puis, on calcule P_2^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - L_1 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/(-2) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

La question III.2) donne alors :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \times 2^n \\ -5n - 2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 3 \times 2^n - 5n - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2$.

$$4) \forall n \in \mathbf{N}, u_n = 2^n \left(3 - 5 \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n} \right).$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ par croissances comparées et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2^n} = 0$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - 5 \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n} \right) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty.$$

Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge.

Exercice 2 (ecricome 2010)

Partie I :

1) Quand $x \rightarrow 0^+$, on écrit : $\varphi(x) = \frac{x \ln x + 1}{x} - \ln(x+1)$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + 1) = 1$.Par inverse, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x + 1}{x} = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0$. Par composée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$.Par différence, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$.La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale à $\mathcal{C}_\varphi$.2) Quand $x \rightarrow +\infty$, on écrit : $\varphi(x) = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{x} = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0$. Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.Par différence, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}_\varphi$.3) φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme, inverse et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0.$$

Donc φ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.4) Tableau de variations de φ :

x	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$	0

5) φ est continue (car dérivable) sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$. $1 \in]0, +\infty[$ admet donc un unique antécédent α par φ , ce qui signifie que l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution α .

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 3 = -\ln 3 - (\ln 4 - \ln 3) + 3 = 3 - 2\ln 2 > 1.$$

$$\varphi(\alpha) = 1$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -\ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) + 2 = 2 - \ln 3 < 1.$$

$$\text{Donc } \varphi\left(\frac{1}{3}\right) > \varphi(\alpha) > \varphi\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'où $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ par stricte décroissance de φ .

6) Programme Python

```
import numpy as np
def f(x):
    y=np.log(x)-np.log(x+1)+1/x
    return y
a=1/3
b=1/2
while b-a>10**-2:
    c=(a+b)/2
    if f(c)<0:
        b=c
    if f(c)>0:
        a=c
print(c)
```

Python retourne $\alpha \approx 0,495$

Partie II :

1) f est continue sur $] -\infty, \alpha]$ comme fonction nulle et continue sur $]\alpha, +\infty[$ comme inverse de fonction continue. Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en α .

$\forall x \leq \alpha, f(x) = 0$ et $\forall x > \alpha, f(x) > 0$ car $\alpha > 0$. Donc $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$.

$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $] -\infty, \alpha]$.

Pour tout réel $A > \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^A f(x)dx &= \int_{\alpha}^A \frac{1}{x^2(x+1)}dx \\ &= \int_{\alpha}^A -\varphi'(x)dx \\ &= -[\varphi(x)]_{\alpha}^A \\ &= -\varphi(A) + \varphi(\alpha) \\ &= -\varphi(A) + 1.\end{aligned}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \varphi(A) = 0 \text{ donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^A f(x)dx = 1.$$

Donc $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Par Chasles, on conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Ainsi, f est une densité de probabilité.

2) X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

$\int_{-\infty}^{\alpha} |xf(x)|dx$ converge (et vaut 0) car f est nulle sur $] -\infty, \alpha]$.

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |xf(x)|dx = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx.$$

$\frac{1}{x(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Riemann de paramètre $2 > 1$).

D'après le critère d'équivalence pour des intégrales de fonctions positives, $\int_{\alpha}^{+\infty} |xf(x)| dx$ converge.

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$ converge. Donc X admet une espérance.

3) Pour tout $x > \alpha$, on a :

$$\varphi'(x) + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1 + (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{x}{x^2(x+1)} = xf(x).$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} xf(x) dx + \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x) dx \\ &= 0 + \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\varphi'(x) + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^A \left(\varphi'(x) + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\varphi(x) - \frac{1}{x} \right]_{\alpha}^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\varphi(A) - \frac{1}{A} - \varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \right] \\ &= -\varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \\ &= -1 + \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

De l'encadrement $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$, on tire :

$$-\frac{1}{3} > -\alpha > -\frac{1}{2}, \text{ puis } 1 - \frac{1}{3} > 1 - \alpha > 1 - \frac{1}{2}, \text{ soit } \frac{1}{2} < 1 - \alpha < \frac{2}{3} \quad (*)$$

De plus, par inverse : $3 > \frac{1}{\alpha} > 2$, soit $2 < \frac{1}{\alpha} < 3 \quad (**)$

En multipliant membre à membre (*) et (**): $\frac{1}{2} \times 2 < \frac{1-\alpha}{\alpha} < \frac{2}{3} \times 3$.

Ainsi, $1 < E(X) < 2$.

4) Pour tout $x > \alpha$, on a : $|x^2 f(x)| = \frac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge (Riemann de paramètre 1).

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, $\int_{\alpha}^{+\infty} |x^2 f(x)| dx$

diverge. Donc X^2 n'admet pas d'espérance.

Donc X n'admet pas de variance (Koenig).

Exercice 3 (ecricome 2010)

Partie I :

1) Pour une partie donnée, l'univers Ω est formé de l'ensemble des couples (x, y) où $x \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ et $y \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Donc $\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$.

$$E_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}.$$

$$\text{Donc } P(E_1) = \frac{\text{card}(E_1)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

$$\text{Pour des raisons de symétrie, } P(E_2) = P(E_1) = \frac{5}{12}.$$

$$E_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \text{ donc } P(E_3) = \frac{\text{card}(E_3)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$2) \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

$$P(X_i = 0) = P(E_1) = \frac{5}{12}, P(X_i = 1) = P(E_3) = \frac{5}{12} \text{ et } P(X_i = 2) = P(E_2) = \frac{1}{6}.$$

$$E(X_i) = 0 \times P(X_i = 0) + 1 \times P(X_i = 1) + 2 \times P(X_i = 2) = 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4}.$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \times P(X_i = 0) + 1^2 \times P(X_i = 1) + 2^2 \times P(X_i = 2) = 1 \times \frac{5}{12} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{13}{12}.$$

$$\text{D'après Koëning, } V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{13}{12} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{48}.$$

$$3) Y_1 = X_1 \text{ donc } P(Y_1 = 0) = \frac{5}{12}, P(Y_1 = 1) = \frac{5}{12} \text{ et } P(Y_1 = 2) = \frac{1}{6}.$$

4) Y_2 cumule les points des deux premières parties donc $Y_2 = X_1 + X_2$.
Comme $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$, on a : $Y_2(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

$$P(Y_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) \underbrace{=}_{\text{ind.}} P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}.$$

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 1) &= P((X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)) \\ &= P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) \quad [\text{incompatibilité}] \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) \quad [\text{indépendance}] \\ &= \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \\ &= \frac{50}{144}. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 2) &= P((X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 0)) \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) \\ &= \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} \\ &= \frac{45}{144}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y_2 = 3) &= P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1)) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{20}{144}.
\end{aligned}$$

$$P(Y_2 = 4) = P(X_1 = 2) \cap X_2 = 2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \frac{4}{144}.$$

5)a) Y_3 cumule les points des deux premières parties et de la troisième partie donc $Y_3 = Y_2 + X_3$.

Comme $Y_2(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$ et $X_3(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$, on a : $Y_3(\Omega) = \llbracket 0, 6 \rrbracket$.

b) Il faut déterminer les probabilités $P((Y_2 = y_2) \cap (Y_3 = y_3))$ pour tout $y_2 \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ et tout $y_3 \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$, ce qui fait $5 \times 7 = 35$ probabilités à calculer !

Certaines sont nulles, comme par exemple $P((Y_2 = 0) \cap (Y_3 = 3))$.

En effet, pour réaliser l'événement, il faudrait gagner 3 points lors de la 3-ième partie, ce qui est impossible.

Certaines ne sont pas nulles, comme par exemple $P((Y_2 = 1) \cap (Y_3 = 3))$:

$$\begin{aligned}
P((Y_2 = 1) \cap (Y_3 = 3)) &= P((Y_2 = 1) \cap (X_3 = 2)) = P(Y_2 = 1)P(X_3 = 2) \\
&= \frac{50}{144} \times \frac{1}{6} = \frac{50}{864} = \frac{100}{1728}.
\end{aligned}$$

Y_2/Y_3	0	1	2	3	4	5	6	loi de Y_2
0	125/1728	125/1728	50/1728	0	0	0	0	25/144
1	0	250/1728	250/1728	100/1728	0	0	0	50/144
2	0	0	225/1728	225/1728	90/1728	0	0	45/144
3	0	0	0	100/1728	100/1728	40/1728	0	20/144
4	0	0	0	0	20/1728	20/1728	8/1728	4/144
loi de Y_3	125/1728	375/1728	525/1728	425/1728	210/1728	60/1728	8/1728	1

c) La loi de Y_3 s'obtient avec la formule des probas totales pour le sce $(Y_2 = k)_{0 \leq k \leq 4}$.

$$\text{Par exemple, } P(Y_3 = 1) = \sum_{k=0}^4 P(Y_2 = k \cap Y_3 = 1) = \frac{125}{1728} + \frac{250}{1728} + 0 = \frac{375}{1728}.$$

6)a) Y_n est le nombre de points cumulés lors des n premières parties.

Donc $Y_n = X_1 + \dots + X_n$.

$$\text{Par linéarité de l'espérance, } E(Y_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \underbrace{\frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{4}}_{n \text{ termes}} = \frac{3n}{4}.$$

$$\text{Par indépendance, } V(Y_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = \underbrace{\frac{25}{48} + \dots + \frac{25}{48}}_{n \text{ termes}} = \frac{25n}{48}.$$

b) On cherche l'entier n à partir duquel $E(Y_n) > 10$, ce qui est équivalent à :

$$\frac{3n}{4} > 10, \text{ ce qui donne } n \geq 14.$$

Partie II :

1)a) L'expérience aléatoire est constituée d'épreuves identiques, successives et indépendantes. A chaque épreuve, la probabilité de succès (récolter 1 point ou 2) est $P(E_1) + P(E_2) = \frac{7}{12}$.

T_1 compte le rang d'obtention du premier succès. Donc $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right)$.

$$T_1(\Omega) = \mathbf{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbf{N}^*, P(T_1 = k) = \frac{7}{12} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}.$$

$$\text{b) } E(T_1) = \frac{1}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{7} \text{ et } V(T_1) = \frac{\frac{5}{12}}{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \frac{60}{49}.$$

2)a) $T_2(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

$$\text{b) } P(T_2 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} P(T_2 = 2) &= P((X_1 = 1 \cap X_2 \geq 1) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 2)) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 \geq 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) \\ &= \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

c) Soit $k \geq 3$ un entier.

L'événement $(T_2 = k)$ est réalisé pour l'une des deux configurations suivantes :

- le joueur ne marque aucun point lors des $k - 1$ premières parties et 2 points à la k -ème partie,
- le joueur marque 1 point au total lors des $k - 1$ premières parties et au moins 1 point à la k -ème partie.

La première configuration a pour probabilité $\underbrace{\frac{5}{12} \times \dots \times \frac{5}{12}}_{k-1 \text{ fois}} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.

La deuxième configuration est formée des événements E_i avec $(1 \leq i \leq k - 1)$: $E_i = \ll \text{le joueur marque 1 point à la } i\text{-ème partie, au moins 1 point à la } k\text{-ième partie et 0 point aux autres parties} \gg$.

Pour tout $\forall i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, on a :

$$P(E_i) = \underbrace{\frac{5}{12} \times \dots \times \frac{5}{12}}_{k-1 \text{ fois}} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}.$$

Les $k - 1$ événements E_i étant incompatibles deux à deux, la probabilité de la deuxième configuration vaut donc $(k - 1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$.

Enfin, les deux configurations étant incompatibles, on a :

$$\forall k \geq 3, P(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k - 1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}.$$

d) Pour $k = 1$, la formule ci-dessus donne $P(T_2 = 1) = \frac{1}{6}$ et on retrouve 2)b).

Pour $k = 2$, on obtient $P(T_2 = 2) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16}$, c'est ok !

e) Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \times k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} - \frac{7}{12} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{7}{12}\right) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \times k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &= -\left(\frac{5}{12}\right)^k + \frac{7}{12} \times k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{k \geq 1} P(T_2 = k)$ converge car c'est une combinaison linéaire d'une série géométrique et d'une série dérivée première convergentes car $\frac{5}{12} \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} \text{Puis, } \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k + \frac{7}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k - 1\right) + \frac{7}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &= -\left(\frac{1}{1 - \frac{5}{12}} - 1\right) + \frac{7}{12} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{12}\right)^2} = \dots = 1. \end{aligned}$$

f) Soit $A = \ll \text{le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2} \gg$.
L'événement $\bar{A}$ est réalisé si et seulement s'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel l'événement $(T_2 = k)$ est réalisé.

$$\text{Ainsi, } \bar{A} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (T_2 = k).$$

$$\text{On déduit : } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1 - 1 = 0.$$

g) En revenant à l'expression de la question 2)c), on a pour tout entier $k \geq 1$:

$$kP(T_2 = k) = \frac{1}{6} \times k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times k(k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2}.$$

La série $\sum_{k \geq 1} |kP(T_2 = k)| = \sum_{k \geq 1} kP(T_2 = k)$ converge car c'est une combinaison linéaire d'une série dérivée première et d'une série dérivée seconde convergentes. Donc T_2 admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(T_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(T_2 = k) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{12}\right)^2} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{5}{12}\right)^3} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{12^2}{7^2} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{2 \times 12^3}{7^3} \\ &= \frac{24}{49} + \frac{120}{49} = \frac{144}{49}. \end{aligned}$$