DM12
à rendre le lundi / /

<u>Exercice</u>

On dispose de n urnes $U_1, ..., U_n$ ($n \geq 2$).
À l'état initial, l'urne U_1 contient 2 boules noires et 1 boule blanche, les autres urnes contenant chacune 1 boule noire et une boule blanche.

Soit l'expérience formée de n épreuves successives $e_1, ..., e_n$ où :
− pour tout entier k ($1 \leq k \leq n-1$), l'épreuve e_k consiste à tirer une boule de l'urne k et à la placer dans l'urne $k+1$,
− l'épreuve e_n consiste à tirer une boule de U_n et à la placer dans U_1.

Pour tout entier k ($1 \leq k \leq n$), on note B_k = « la boule sortie de l'urne k est blanche » et N_k = « la boule sortie de l'urne k est noire ».

1)Préciser $P(B_1)$.

2)Montrer que $P(B_2) = 4/9$.

3)En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout k entier ($1 \leq k \leq n-1$), on a :

$$P(B_{k+1}) = \frac{1}{3}P(B_k) + \frac{1}{3}.$$

4)Exprimer $P(B_k)$ en fonction de k.

5)Justifier sans calcul que $P_{N_1}(B_n) = P(B_{n-1})$.

6)En déduire que $\begin{cases} P(B_1 \cap B_n) = P(B_n) - \dfrac{2}{3}P(B_{n-1}) \\[2ex] P(N_1 \cap N_n) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}P(B_{n-1}). \end{cases}$

7)Conclure que la probabilité pour qu'à l'issue de l'expérience, l'urne 1 ait toujours 2 boules noires et 1 boule blanche est égale à :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}.$$