Corrrection DM2 cubes

<u>Exercice 1</u> (edhec 2018 option maths approfondies)

1)a)La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$.

Donc $\forall t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{t\ln t} \leq \dfrac{1}{n\ln n}$.

En intégrant entre les bornes croissantes n et $n+1$, on a :

$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n\ln n}\mathrm{d}t$.

Or, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n\ln n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n\ln n}\big((n+1)-n\big) = \frac{1}{n\ln n}$.

Donc pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n\ln n}$.

1)b)$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{1/t}{\ln t}\mathrm{d}t = [\ln(\ln t)]_n^{n+1} = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln n)$.

Compte tenu de 1)a), on a donc pour tout entier $n \geq 2$, $a_n \geq \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln n)$.

$\displaystyle\sum_{n\geq 2} \big(\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln n)\big)$ est télescopique et diverge car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$.

D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ diverge.

2)a)D'une part, $x \mapsto 1-x$ est polynomiale donc continue sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[$, à valeurs dans $]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$. D'autre part, $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Par composée, $x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[$ et ne s'annule pas.
Par produit, $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[$ et ne s'annule pas non plus.
$x \mapsto -x$ est polynomiale donc continue sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[$.
f est donc continue sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[$ par quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et $1-x \underset{0}{\sim} 1$. Donc $f(x) \underset{0}{\sim} 1$.

Cela signifie que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

On conclut que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

2)b)Pour tout $x \in\,]-\infty, 0[\, \cup\,]0,1[$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)}.$$

Cherchons un équivalent du numérateur et du dénominateur en 0.

$\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et $1-x \underset{0}{\sim} 1$. Par produit, $x(1-x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x^2 \quad (*)$

Par ailleurs, en faisant un DL d'ordre 2 en 0, on a : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

La transformation $x \to -x$ donne : $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On déduit en reportant dans le numérateur :

$$\begin{aligned}
-x-(1-x)\ln(1-x) &= -x-(1-x)\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\
&= -x-\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+x^2+\frac{x^3}{2}-xo(x^2)\right)\\
&= -\frac{x^2}{2}-o(x^2)-\frac{x^3}{2}+xo(x^2)\\
&= -\frac{x^2}{2}+o(x^2).
\end{aligned}$$

(car les trois derniers termes sont tous négligeables devant x^2 quand $x \to 0$).

On a donc $-x-(1-x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ $\quad (**)$

Par quotient de $(*)$ et $(**)$, on déduit : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

Cela signifie que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

3)a)Par les mêmes arguments que 2)a), f est dérivable sur $]-\infty,0[\,\cup\,]0,1[$ car elle coïncide sur ces intervalles avec le quotient, le produit et la composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x)-(-x)(-\ln(1-x)-1)}{\big((1-x)\ln(1-x)\big)^2} = -\frac{\ln(1-x)+x}{\big((1-x)\ln(1-x)\big)^2}.$$

3)b)Pour tout $x<1$, posons $g(x) = \ln(1-x)+x$.
g est dérivable sur $]-\infty,1[$ par somme et composée de fonctions dérivables et $\forall x<1, g'(x) = \dfrac{-1}{1-x}+1 = \dfrac{-x}{1-x}$.

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'après le tableau de variations, g est négative. Donc $\forall x<1, \ln(1-x)+x \leq 0$.
On déduit que $\forall x \in\,]-\infty,0[\cup]0,1[\,, f'(x) \geq 0$. Donc f est croissante sur $]-\infty,1[$.

3)c)• $1-x \underset{-\infty}{\sim} -x$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(1-x)}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$, par inverse : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\ln(1-x)} = 0$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{t\to0^+} t\ln t = 0^-$ par croissances comparées.

$\lim\limits_{x\to1^-} -x = -1$, par quotient $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

Exercice 2 (extrait hec 2015 option maths appliquées)

1)a)Pour tous éléments $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbf{R}^n$, pour tout réel λ :
$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, ..., \lambda x_n + y_n)$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } f(\lambda x + y) &= (\lambda x + y) - \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)\right) v \\ &= (\lambda x + y) - \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\right) v \\ &= \lambda x + y - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v \\ &= \lambda \left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right) + y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v \\ &= \lambda f(x) + f(y).\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

De plus, $\forall x \in \mathbf{R}^n, f(x) \in \mathbf{R}^n$ car $v \in \mathbf{R}^n$. Donc f est « endo ».

On conclut que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

1)b)$f(v) = v - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) v = v - 1.v$ car par énoncé, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. Donc $f(v) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f\left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right) \\ &= f(x) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) f(v) \text{ par linéarité de } f \\ &= f(x) \text{ car } f(v) = 0.\end{aligned}$$

Donc $f \circ f = f$.

2)a)On montre la première équivalence par doubles implications.
Soit $y \in Imf$, il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $y = f(x)$. On a alors :
$f(y) = f\big(f(x)\big) = (f \circ f)(x) = f(x)$ car $f \circ f = f$. Donc $f(y) = y$.
Réciproquement, si $f(y) = y$, alors y est l'image de y par f. Donc $y \in Imf$.
On a donc établi que $y \in Imf \iff f(y) = y$.

La deuxième équivalence se montre directement.
$f(y) = y \iff f(y) - y = 0 \iff (f - \mathrm{Id})(y) = 0 \iff y \in Ker(f - \mathrm{Id})$.

2)b)Le théorème du rang donne : $dimKerf + dimImf = dim\mathbf{R}^n$, ou encore $dimImf = n - dimKerf$.
La somme des composantes de v vaut 1 donc v est non nul. De plus, $f(v) = 0$, ce qui signifie que $v \in Kerf$. Donc $Kerf$ n'est pas nul et $dimKerf \geq 1$. d'où dim $Imf \leq n - 1$.

2)c)Pour tout entier $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$f(e_i) = e_i - \left(\sum_{j=1}^{n} (e_i)_j\right) v = e_i - 1.v = e_i - v.$$

De même, $f(e_{i+1}) = e_{i+1} - v$.

On déduit : $f(e_i - e_{i+1}) = f(e_i) - f(e_{i+1}) = (e_i - v) - (e_{i+1} - v) = e_i - e_{i+1}$.

D'après la question 2)a), on a alors $e_i - e_{i+1} \in Imf$.

Imf est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, il est stable par combinaison linéaire.
Toute combinaison linéaire des $e_i - e_{i+1}$ ($i \in [\![1, n-1]\!]$) est donc encore dans Imf.

Ceci prouve que Vect $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n) \subset Imf$, soit $F \subset Imf$.

2)d)Montrons que $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre.
Pour tous réels α_i ($i \in [\![1, n-1]\!]$), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (e_i - e_{i+1}) = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_{i+1} = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i - \sum_{j=2}^{n} \alpha_{j-1} e_j = 0 \quad \text{en posant } j = i+1 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i - \sum_{i=2}^{n} \alpha_{i-1} e_i = 0 \quad \text{car } i \text{ est muet} \\
&\iff \alpha_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i e_i - \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_{i-1} e_i - \alpha_{n-1} e_n = 0 \\
&\iff \alpha_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) e_i - \alpha_{n-1} e_n = 0 \\
&\iff \alpha_1 = \alpha_{n-1} = 0 \text{ et } \forall i \in [\![2, n-1]\!], \alpha_i - \alpha_{i-1} = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![1, n-1]\!], \alpha_i = 0.
\end{aligned}$$

Donc $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre.
Comme c'est par ailleurs une famille génératrice de F par construction, c'est finalement une base de F.

Il y a $n-1$ vecteurs dans cette base. Donc $dimF = n-1$.

2)e)Comme $F \subset Imf$, on a $dimF \leq dimImf$, c'est-à-dire $dimImf \geq n-1$.
Or, d'après la question 2)b), on a aussi $dimImf \leq n-1$.
On conclut que $dimImf = n-1$.

Enfin, le théorème du rang donne : $dimKerf = dim\mathbf{R}^n - dimImf = n-(n-1) = 1$.