Corrigé - révisions - séance 2

1)**FAUX** exemple dans $\mathbf{R}^2$: $u = (1,0)$ $v = (0,1)$ $w = (1,1)$.
Les vecteurs u, v et w ne sont pas colinéaires deux à deux.
Pourtant la famille (u,v,w) est liée puisque $w = u + v$.

2)**VRAI** c'est une propriété de cours du chapitre 1.

3)**VRAI** prenons l'exemple d'une famille de 3 vecteurs u, v et w dont l'un parmi eux est nul. Pour fixer les idées, imaginons que c'est w qui est nul.
On a alors $0.u + 0.v + 1.w = 0$, ce qui prouve que (u,v,w) est liée puisqu'on a construit une combinaison linéaire nulle des 3 vecteurs u, v et w où les coefficients de la combinaison linéaire ne sont pas tous nuls.

4)**FAUX** En général, un sev F de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ ne contient pas I_3.
On peut considérer par exemple $F = \text{Vect}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices de F sont les matrices colinéaires à A donc de la forme aA où a est un réel quelconque, ce qui mène à $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$.

Et on voit alors que $I_3 \notin F$.

5)**FAUX** tout simplement parce que $\mathbf{R}^2$ n'est pas une partie de $\mathbf{R}^3$.

6)**VRAI** Par l'absurde. Supposons qu'il existe une famille libre (u,v,w) de $\mathbf{R}^2$.
Posons $F = \text{Vect}(u,v,w)$. La famille (u,v,w) est alors génératrice de F, mais comme elle est libre, c'est donc une base de F. Donc $dimF = 3 \quad (*)$
Or, $F \subset \mathbf{R}^2$ donc $\dim F \leq \dim \mathbf{R}^2 = 2 \quad (**)$

$(*)$ et $(**)$ mènent à une contradiction.

7)**FAUX** la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est n^2.

8)**VRAI** c'est une propriété de cours du chapitre 1.

9)**FAUX** Attention, la formule exacte est : $\dim Kerf + \dim Imf = \dim E$ (théorème du rang).

10)**VRAI** c'est une propriété de cours du chapitre 2.

11)**FAUX** une matrice triangulaire n'est inversible que si elle n'a pas de zéro sur sa diagonale.
Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est triangulaire, mais n'est pas inversible.

12)**VRAI** c'est une propriété de cours du chapitre 4.

13)**FAUX** c'est le contraire qui est vrai : si 0 est valeur propre d'une matrice, alors celle-ci n'est pas inversible.

On a même l'équivalence :
0 est valeur propre de $A \iff A$ n'est pas inversible.

C'est le corollaire d'un théorème général important (THM1 du chapitre 4) :

λ est valeur propre de $A \iff A - \lambda I$ n'est pas inversible.

14)**VRAI** Par exemple si D est diagonale, elle peut s'écrire $D = I^{-1}DI$, ce qui prouve que D est semblable à une matrice diagonale (elle-même en l'occurence) donc est diagonalisable.

15)**FAUX** Les valeurs propres d'une matrice (diagonalisable ou non) n'ont aucune raison d'être sur sa diagonale.

Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de A sont -1 et 1 (calculer le déterminant de $A - \lambda I$).

16)**VRAI** cela peut se produire par exemple si l'un des deux sous-espaces propres est de dimension 2 et l'autre de dimension 1. Le théorème de réduction assure alors que la matrice est diagonalisable.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de A sont 1 et 2 (car elle est triangulaire).
Un calcul donne : $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

17)**VRAI** c'est une propriété de cours du chapitre 4 : toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ a au plus n valeurs propres.

18)**VRAI** c'est le théorème de réduction du chapitre 4 dans sa forme faible.

19)**VRAI** Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de A
$\iff A - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff det(A - \lambda I) = 0$
$\iff (-\lambda) \times (-\lambda) - 1 \times (-1) = 0$
$\iff \lambda^2 + 1 = 0$.
Cette équation n'a pas de solution donc A ne possède pas de valeur propre.

20)**VRAI** puisque les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont sur sa diagonale.