

Problème

Partie A (rotations)

On note \mathcal{R} l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques tels que $a^2 + b^2 = 1$.

- 1) Montrer que $\forall (M, N) \in \mathcal{R}^2, MN \in \mathcal{R}$.
- 2) Soit M une matrice quelconque de \mathcal{R} .
 - a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, M^n \in \mathcal{R}$.
 - b) Justifier que tous les coefficients de M appartiennent à $[-1, 1]$.
 - c) Justifier que M est inversible et vérifier que $M^{-1} \in \mathcal{R}$.
- 3) \mathcal{R} est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$?

Partie B (nombre plastique φ)

- 4) a) Montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet une unique solution φ .
Etablir que $1 < \varphi < 2$.
- b) Justifier les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^3 = \varphi + 1 \\ 1 - \varphi^2 = -\frac{1}{\varphi} \\ \varphi^5 = \varphi^2 + \varphi + 1 \\ \varphi^{-4} = \varphi - 1 \end{array} \right.$$

Dans la suite du problème, on considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi}{2} & -\sqrt{\frac{3-\varphi}{4\varphi}} \\ \sqrt{\frac{3-\varphi}{4\varphi}} & -\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{2} & 1 \\ \sqrt{\frac{3-\varphi}{4\varphi}} & 0 \end{pmatrix}.$$

- 5) Montrer que B ne possède aucune valeur propre.
- 6) a) Justifier que P est inversible, puis montrer que $CP = PB$.
b) Etablir que $\forall n \in \mathbf{N}, B^n = P^{-1}C^nP$.

7) On pose $B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

a) A l'aide des questions précédentes, montrer qu'il existe des constantes réelles m et M telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \frac{m}{(\sqrt{\varphi})^n} \leq a_n \leq \frac{M}{(\sqrt{\varphi})^n}.$$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Préciser de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$.

Partie C (calcul d'une puissance de matrice)

Dans cette partie, on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8)a) Vérifier que $A^3 = A + I$.

b) En déduire l'unique valeur propre de A et une base de son sous-espace propre associé.

c) A est-elle diagonalisable ?

9) Soit Φ l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 de matrice A dans la base canonique.

Soient les vecteurs u , v et w de \mathbf{R}^3 donnés par :

$$u = (1, \varphi, \varphi^2), \quad v = (-\varphi^2, 1, 0) \quad \text{et} \quad w = (-\varphi, 0, 1).$$

a) Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de \mathbf{R}^3 , puis écrire la matrice de passage Q de la base canonique à la base \mathcal{C} .

b) Calculer les vecteurs $\Phi(u)$, $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$, puis écrire chacun d'entre eux comme combinaison linéaire de u , v et w .

c) Sans chercher à calculer Q^{-1} , justifier l'égalité suivante :

$$A = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & & B \\ 0 & & \end{array} \right) Q^{-1}.$$

d) Conclure que $\forall n \in \mathbf{N}$, $A^n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & & B^n \\ 0 & & \end{array} \right) Q^{-1}$.

Partie D (suite de Padovan)

Dans cette partie, on étudie la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ formée d'entiers strictement positifs, définie par la donnée de ses trois premiers termes $U_0 = 1$, $U_1 = 1$ et $U_2 = 1$, ainsi que par l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+3} = U_{n+1} + U_n.$$

On considère la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix}$.

10)a) Calculer U_3, U_4, U_5, U_6 et U_7 .

b) Montrer que $\forall n \geq 2$, $U_{n+3} - U_{n+2} = U_{n-2}$.

c) En déduire le sens de variation de $(U_n)_{n \geq 0}$ et préciser sa limite.

11)a) Préciser X_0 . Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$.

12) On admet que la première ligne de Q^{-1} est : $\left(\frac{1}{2\varphi + 3}, \frac{\varphi^2}{2\varphi + 3}, \frac{\varphi}{2\varphi + 3} \right)$.

A l'aide des questions 7), 9)d) et 11)b), montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ tendant vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, U_n = \frac{\varphi^5}{2\varphi + 3} \times \varphi^n + \epsilon_n.$$

Partie E (étude d'une série)

13) Donner un équivalent simple de U_n , puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

14) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{U_n}$ est convergente.

15) A l'aide de la question 10)b), montrer que $\forall n \geq 4$, $U_{n+1} = 2 + \sum_{k=0}^{n-4} U_k$.

16)a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 4, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket U_k \geq \varphi^{k-4}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{U_k} \leq \frac{1}{\varphi^{n-8}}$.

17) Soit $r \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que $\frac{1}{\varphi^{n-8}} \leq 10^{-r} \iff n \geq 8 + \frac{r \ln 10}{\ln \varphi}$.

b) Supposons qu'on dispose d'un encadrement de φ entre deux réels φ_{min} et φ_{max} du type : $\varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$.

Posons $p = 1 + \left\lceil 8 + \frac{r \ln 10}{\ln(\varphi_{min})} \right\rceil$.

Montrer que $\sum_{k=0}^p U_k$ est une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près.

Partie F (informatique)

18) On pose $f : x \mapsto x^3 - x - 1$.

Écrire une fonction python d'en-tête `def f(x)` : prenant comme paramètre un réel x et renvoyant la valeur de $f(x)$.

19) Compléter la fonction ci-dessous d'en-tête `def plastique(alpha)` : prenant comme paramètre un entier α et renvoyant une valeur approchée de φ à $10^{-\alpha}$ près.

```
def plastique(alpha):
    a=1
    b=2
    while b-a>..... :
        c=(a+b)/2
        if f(c)<0:
            ..... =c
        if f(c)>0:
            ..... =c
    return c
```

20) Compléter la fonction ci-dessous d'en-tête `def padovan(n)` : prenant comme paramètre un entier naturel n et renvoyant la valeur de U_n .

```
def padovan(n):
    liste=[1,1,1]
    for i in range(3,.....):
        liste.append(.....)
    return liste ....
```

21) En exécutant la fonction `plastique` en prenant $\alpha=2$, on obtient : $1,32 \leq \varphi \leq 1,33$.

Écrire une fonction d'en-tête `serie(r)` prenant comme paramètre un entier r et renvoyant une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près.

Indication :

Utiliser la question 17).

On rappelle que la fonction `floor(x)` associe la partie entière de x .

EXERCICE

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0, I_1 .
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \rightarrow e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

9. En déduire la limite de la suite $(n I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 10. Déterminer la limite de la suite $(n(n I_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 11. Donner alors les valeurs de a, b, c .
-