Exercice 1 (ecricome 2013)

1)$\forall x \in \mathbf{R}, R'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$.
Les racines de R' sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.

2)Tableau de variations de R :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$R'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$R(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

3)R est continue (car polynomiale) et strictement croissante sur $]0,1[$.
Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $R\big(]0,1[\big) =]-3,1[$.
$0 \in]-3,1[$ admet donc un unique antécédent a par R.
Ainsi, R admet une unique racine a sur $]0,1[$ et $0 < a < 1$.

De même, R est une bijection de $]1,3]$ sur $R\big(]1,3[\big) =]-3,1[$.
$0 \in]-3,1[$ admet donc un unique antécédent b par R.
Ainsi, R admet une unique racine b sur $]1,3[$ et $1 < b < 3$.

Puis, R est une bijection de $]3,+\infty]$ sur $R\big(]3,+\infty[\big) =]-3,+\infty[$.
$0 \in]-3,+\infty[$ admet donc un unique antécédent c par R.
Ainsi, R admet une unique racine c sur $]3,+\infty[$ et $3 < c$.

Enfin, $R\big(]-\infty,0]\big) =]-\infty,-3[$ donc R étant strictement négative sur $]-\infty,0]$ ne peut s'y annuler. Et $R(1) \neq 0$, $R(3) \neq 0$.

On a montré que R admet 3 racines a, b et c avec $0 < a < 1 < b < 3 < c$.

4)$AX_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 6\lambda^2 - 9\lambda + 3 \end{pmatrix}$.

Remarquons d'abord que $X_\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} X_\lambda \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda &\Longleftrightarrow AX_\lambda = \lambda X_\lambda \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 6\lambda^2 - 9\lambda + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}. \\ &\Longleftrightarrow 6\lambda^2 - 9\lambda + 3 = \lambda^3 \\ &\Longleftrightarrow R(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

5)On sait que $R(a) = R(b) = R(c) = 0$.
D'après la question 4), X_a, X_b et X_c sont alors des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres a, b et c.

$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes a, b et c.
Ses sous-espaces propres sont de dimension 1, de bases (X_a), (X_b) et (X_c).
A est donc diagonalisable d'après le théorème de réduction.
Il existe alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A et P porte en colonne une base des sous-espaces propres de A, c'est-à-dire X_a, X_b et X_c.
On peut prendre par exemple :
$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

6)Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A \\ &= A\lambda M + AN + \lambda MA + NA \\ &= \lambda(AM + MA) + AN + NA \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Remarquons que $M' = P^{-1}MP \iff M = PM'P^{-1}$ et que $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned} f(M) = 0 &\iff AM + MA = 0 \\ &\iff PDP^{-1}PM'P^{-1} + PM'P^{-1}PDP^{-1} = 0 \\ &\iff PDM'P^{-1} + PM'DP^{-1} = 0 \\ &\iff P(DM' + M'D)P^{-1} = 0 \\ &\iff DM' + M'D = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7)DN + ND &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bs & bt & bu \\ cv & cw & cx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} pa & qb & rc \\ sa & tb & uc \\ va & wb & xc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2ap & (a+b)q & (a+c)r \\ (a+b)s & 2bt & (b+c)u \\ (a+c)v & (b+c)w & 2cx \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les réels a, b et c étant strictement positifs, les réels $a+b$, $a+c$ et $b+c$ sont non nuls. On a donc :

$DN + ND = 0 \iff p = q = r = s = t = u = v = w = x = 0 \iff N = 0.$

8)$M \in Kerf \iff f(M) = 0 \iff DM' + M'D = 0 \iff M' = 0$ (grâce à 7))
$\iff P^{-1}MP = 0 \iff M = 0.$

Exercice 2 (ecricome 2013)

Partie I : étude des zéros de φ

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x - 1 = -1$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$.
Par inverse, $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$.
Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale pour $\mathscr{C}_\varphi$.
2)Quand $x \to +\infty$, on écrit : $\varphi(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Par différence, $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.
3)φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit, différence et quotient de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

4)$\forall x > 0, \varphi'(x) > 0$ donc φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
D'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5)φ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi\big(]0, +\infty[\big) = \mathbf{R}$.
0 admet donc un unique antécédent $\alpha > 0$ par φ.
Ainsi, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
$\varphi(1) = -1$, $\varphi(\alpha) = 0$ et $\varphi(e) = \dfrac{e-1}{e}$ car $\ln e = 1$.
Donc $\varphi(1) < \varphi(\alpha) < \varphi(e)$.
φ étant strictement croissante, cela entraîne que $1 < \alpha < e$.

Partie II : étude d'une suite réelle

1)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $\ll$ u_n existe et $u_n > \alpha$ $\gg$.

$\mathscr{P}(n)$ est vraie. En effet, d'une part, $u_0 = e$ existe ; d'autre part, comme $\alpha < e = u_0$, on a $u_0 > \alpha$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n > \alpha \quad (1)$
Or, $\alpha > 0$ donc $u_n > 0$, ce qui assure l'existence de $\varphi(u_n)$, c'est-à-dire de u_{n+1}.
Par stricte croissance de φ, l'inégalité (1) donne : $\varphi(u_n) > \varphi(\alpha)$.
Comme $\varphi(\alpha) = 0$, l'inégalité ci-dessus devient : $\varphi(u_n) > 0 \quad (2)$
Par somme de (1) et (2), on déduit : $\varphi(u_n) + u_n > \alpha$, soit $u_{n+1} > \alpha$.
Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2)Supposons que la suite (u_n) converge vers L.
Par passage à la limite dans l'inégalité $u_n > \alpha$, on a : $L \geq \alpha$.
La fonction $x \mapsto \varphi(x) + x$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc en $L > 0$.
D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $\varphi(x)+x = x$, équivalente à $\varphi(x) = 0$, laquelle admet pour unique solution α.
Donc si la suite (u_n) converge, sa limite vaut α.

3)$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - u_n = \big(\varphi(u_n) + u_n\big) - u_n = \varphi(u_n) > 0$ (voir question 1)).
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

4)Comme (u_n) est strictement croissante, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > u_0$.
Supposons que la suite (u_n) converge vers L.
Par passage à la limite, on a : $L \geq u_0$. Par ailleurs, $L = \alpha$ d'après II)2).
Donc $\alpha \geq u_0$, ce qui contredit la question II)1).
Donc la suite (u_n) diverge. Etant croissante, elle tend donc vers $+\infty$.

5)programme :

```
import numpy as np
def phi(x):
    y=(x*np.log(x)-1)/x
    return y
A=float(input("entrer un réel A>0"))
u=np.exp(1)
n=0
while u<A:
    u=phi(u)+u
    n=n+1
print(n)
```

Partie III : extréma de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

1)$(x,y)\mapsto\dfrac{y^2}{2}$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ car polynomiale.
$(x,y)\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ et $(x,y)\mapsto\dfrac{y}{x}$ sont de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ comme inverse et quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.
$(x,y)\mapsto e^{-1/x}$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ comme composée de deux fonctions de classe C^2.
Par somme et différence, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
2)f étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, elle admet des dérivées partielles premières données par :

$$\partial_1 f(x,y)=-\frac{2}{x^3}+\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\quad\text{et}\quad\partial_2 f(x,y)=-\frac{1}{x}+y.$$

Les points critiques de f sont les solutions sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\partial_1 f(x,y)&=&0\\ \partial_2 f(x,y)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=0\\ y=\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$

Or, $-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=0\iff e^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\iff-\dfrac{1}{x}=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\iff-\dfrac{1}{x}=-\ln x$
$\iff\ln x-\dfrac{1}{x}=0\iff\varphi(x)=0\iff x=\alpha.$

Donc l'unique point critique de f est $A\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

3)f étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, elle admet des dérivées partielles secondes données par :

$\partial^2_{1,1}f(x,y)=\partial_1\left(\partial_1 f(x,y)\right)=\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{2y}{x^3}+\left(-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}},$
$\partial^2_{1,2}f(x,y)=\partial_1\left(\partial_2 f(x,y)\right)=\dfrac{1}{x^2},$
$\partial^2_{2,1}f(x,y)=\partial_2\left(\partial_1 f(x,y)\right)=\dfrac{1}{x^2},$
$\partial^2_{2,2}f(x,y)=\partial_2\left(\partial_2 f(x,y)\right)=1.$

Donc $\partial^2_{1,1}f\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{4}{\alpha^4}+\left(-\dfrac{2}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\alpha^4}\right)e^{-\frac{1}{\alpha}}\qquad(\star)$

Or, d'après les calculs faits en III)2), on a : $e^{-\frac{1}{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha}$.

On déduit en remplaçant dans $(\star)$:
$\partial^2_{1,1}f\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{4}{\alpha^4}+\left(-\dfrac{2}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\alpha^4}\right)\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha^4}+\dfrac{1}{\alpha^5}=\dfrac{2\alpha+1}{\alpha^5}.$

4)La matrice hessienne de f au point $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$ est :

$$\nabla^2 f\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) & \partial^2_{1,2} f\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) \\ \partial^2_{2,1} f\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) & \partial^2_{2,2} f\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha+1}{\alpha^5} & \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de $\nabla^2 f\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$

$\iff \nabla^2 f\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) - \lambda I$ n'est pas inversible

$\iff \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^5} - \lambda\right)(1-\lambda) - \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\alpha^2} = 0$

$\iff \lambda^2 - \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^5} + 1\right)\lambda + \frac{2\alpha+1}{\alpha^5} - \frac{1}{\alpha^4} = 0$

$\iff \lambda^2 - \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha^5} + 1\right)\lambda + \frac{\alpha+1}{\alpha^5} = 0.$

Cette équation admet deux solutions λ_1 et λ_2 telles que :

$\lambda_1\lambda_2 = \frac{\alpha+1}{\alpha^5} > 0$, ce qui entraîne que λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.

De plus, $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2\alpha+1}{\alpha^5} + 1 > 0.$

Cela entraîne que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

On conclut que f admet en A un minimum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

✓ On a utilisé que les solutions x_1 et x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$ vérifient : $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Exercice 3 (ecricome 2013)

Partie I : étude du cas particulier $b = n = 2$

1)Introduisons pour tout entier $k \geq 1$ les événements suivants :
$B_k = \ll$ la k -ième boule tirée par le joueur A est blanche $\gg$,
$N_k = \ll$ la k -ième boule tirée par le joueur A est noire $\gg$.
$P(X=0) = P(B_1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
$P(X=1) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \dfrac{2}{4}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.
$P(X=2) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \dfrac{2}{4}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{6}$.
2)X est discrète finie donc admet une espérance et une variance.
$E(X) = 0P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) = \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$.
$E(X^2) = 0^2P(X=0) + 1^2P(X=1) + 2^2P(X=2) = \dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{6} = 1$.
La formule de Koënig donne enfin :
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$.
3)Comme $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, la famille $\big((X=0), (X=1), (X=2)\big)$ est un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales donne :
$P(Y=0)$
$= P(X=0)P_{(X=0)}(Y=0) + P(X=1)P_{(X=1)}(Y=0) + P(X=2)P_{(X=2)}(Y=0)$
$= \dfrac{1}{2} \times P_{(X=0)}(Y=0) + \dfrac{1}{3} \times P_{(X=1)}(Y=0) + \dfrac{1}{6} \times P_{(X=2)}(Y=0) \quad (*)$
Calculons les probabilités conditionnelles.

Supposons l'événement $(X=0)$ réalisé, cela signifie que le joueur A a tiré une blanche au premier tirage, puis s'arrête. Il reste alors dans l'urne 1 blanche et 2 noires. Le joueur B effectue alors son premier tirage.
L'événement $(Y=0)$ se réalise si ce tirage apporte une blanche, ce qui se produit avec la probabilité $1/3$.
Donc $P_{(X=0)}(Y=0) = 1/3$.

Supposons l'événement $(X=1)$ réalisé, cela signifie que le joueur A a tiré une noire, puis une blanche et s'arrête. Il reste alors dans l'urne 1 blanche et 1 noire. Le joueur B effectue alors son premier tirage.
L'événement $(Y=0)$ se réalise si ce tirage apporte une blanche, ce qui se produit avec la probabilité $1/2$.
Donc $P_{(X=1)}(Y=0) = 1/2$.

Supposons l'événement $(X = 2)$ réalisé, cela signifie que le joueur A a tiré deux noires, puis une blanche et s'arrête. Il ne reste alors dans l'urne qu'une blanche. Le joueur B effectue alors son premier tirage.
L'événement $(Y = 0)$ se réalise si ce tirage apporte une blanche, ce qui se produit forcément.
Donc $P_{(X=2)}(Y = 0) = 1$.

En reportant les probabilités conditionnelles dans $(*)$, on obtient :
$P(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{2}$.
4)Introduisons pour tout entier $k \geq 1$ les événements suivants :

$B_k = \ll$ la k -ième boule tirée par le joueur B est blanche $\gg$,
$N_k = \ll$ la k -ième boule tirée par le joueur B est noire $\gg$.

Soit $i \geq 1$ un entier.

$P(X = 0 \cap Y = i)$

$= P(X = 0)P_{(X=0)}(Y = i)$

$= \frac{1}{2} \times P(N_1 \cap ... \cap N_i \cap B_{i+1})$

$= \frac{1}{2} \times P(N_1)...P(N_i)P(B_{i+1})$ par indépendance du fait de la remise

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ en raisonnant comme la question 3)

$= \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^i$.

$P(X = 1 \cap Y = i)$

$= P(X = 1)P_{(X=1)}(Y = i)$

$= \frac{1}{3} \times P(N_1 \cap ... \cap N_i \cap B_{i+1})$

$= \frac{1}{3} \times P(N_1)...P(N_i)P(B_{i+1})$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^i$.

$P(X = 2 \cap Y = i) = P(X = 2)P_{(X=2)}(Y = i) = 0$.

En effet, si l'événement $(X = 2)$ est réalisé, il ne reste dans l'urne qu'une blanche quand le joueur A a fini ses tirages. Il est alors impossible au joueur B de tirer i noires puis une blanche. Donc $P_{(X=2)}(Y = i) = 0$.

5)La formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $\big((X = 0), (X = 1), (X = 2)\big)$ donne pour tout entier $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}P(Y=i) &= P(X=0\cap Y=i)+P(X=1\cap Y=i)+P(X=2\cap Y=i)\\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i.\end{aligned}$$

Et par ailleurs, $P(Y=0)=\dfrac{1}{2}$.

Les séries $\displaystyle\sum_{i\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^i$ et $\displaystyle\sum_{i\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ sont convergentes car géométriques de paramètres $2/3$ et $1/2$ appartenant à $]-1,1[$.

Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\displaystyle\sum_{i\geq 1}P(Y=i)$ converge. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)\\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\\ &= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ en posant } n=i-1\\ &= \frac{1}{9}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Enfin, $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}P(Y=i)=P(Y=0)+\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

6)Pour tout entier $i\geq 1$, on a en reprenant le calcul fait en 5) :

$$iP(Y=i)=\frac{1}{9}\times i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{12}\times i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

Les séries $\displaystyle\sum_{i\geq 1}i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ et $\displaystyle\sum_{i\geq 1}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ sont convergentes car ce sont des séries dérivées premières de paramètres $2/3$ et $1/2$ appartenant à $]-1,1[$.

Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\displaystyle\sum_{i\geq 1}iP(Y=i)$ converge. Donc Y admet une espérance donnée par :

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} iP(Y=i) \\
&= 0P(Y=0) + \sum_{i=1}^{+\infty} iP(Y=i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9} \times i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{12} \times i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \right) \\
&= \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{+\infty} \times i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{1}{(1-2/3)^2} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{(1-1/2)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Partie II : retour au cas général

1))Introduisons de nouveau pour tout entier $k \geq 1$ les événements suivants :

$B_k =\ll$ la k -ième boule tirée par le joueur A est blanche $\gg$,
$N_k =\ll$ la k -ième boule tirée par le joueur A est noire $\gg$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_k \cap B_{k+1}) \\ &= P(N_1)P_{N_1}(N_2) \cdots P_{N_1 \cap ... \cap N_{k-1}}(N_k)P_{N_1 \cap ... \cap N_k}(B_{k+1}) \\ &= \frac{n}{n+b} \times \frac{n-1}{n+b-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{(n+b)-(k-1)} \times \frac{b}{(n+b)-k} \quad (*) \end{aligned}$$

Pour trouver par exemple $P_{N_1 \cap ... \cap N_{k-1}}(N_k)$, on raisonne de la façon suivante : on suppose que $N_1 \cap ... \cap N_{k-1}$ est réalisé. Comme $k-1$ boules ont été tirées sans remise, il ne reste plus que $(n+b)-(k-1)$ boules dans l'urne dont $n-(k-1)$ sont noires. Au moment d'effectuer le k-ième tirage, la proportion de boules noires dans l'urne vaut alors $\dfrac{n-(k-1)}{(n+b)-(k-1)}$.

Simplifions maintenant $(*)$ en faisant apparaître des factorielles.

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times \cdots \times \big(n-(k-1)\big) &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1)) \times (n-k) \cdots \times 1}{(n-k) \times \cdots \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

De même, en effectuant le même calcul avec $n \to n+b$, on a :

$$(n+b) \times (n+b-1) \times \cdots \times \big(n+b-(k-1)\big) = \frac{(n+b)!}{(n+b-k)!}.$$

En reportant dans $(*)$, on obtient :

$$P(X = k) = \frac{\frac{n!}{(n-k)!} \times b}{\frac{(n+b)!}{(n+b-k)!} \times (n+b-k)} = \frac{\frac{(n+b-k)!}{(n-k)!(n+b-k)} \times b}{\frac{(n+b)!}{n!}} = \frac{\frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!} \times b}{\frac{(n+b)!}{n!}}$$

$$= \frac{\frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!} \times b \times (b-1)!}{\frac{(n+b)!}{n!}} = \frac{\frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!}}{\frac{(n+b)!}{n!b!}} = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

On vérifie enfin que la formule démontrée reste vraie pour $k = 0$.

Or, le membre de droite vaut : $P(X = 0) = P(B_1) = \dfrac{b}{n+b}$.

Et le membre de gauche vaut : $\dfrac{\binom{n+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \dfrac{\frac{(n+b-1)!}{n!(b-1)!}}{\frac{(n+b)!}{n!b!}} = \frac{(n+b-1)!b!}{(n+b)!(b-1)!} = \frac{b}{n+b}$.

2)La famille d'événements $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$. Cela mène à :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}=1$, c'est-à-dire : $\displaystyle\frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+b-1}{b-1}=1$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}$.

Puis, en posant $i=n-k$, on a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{i+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}$.

Enfin, i étant muet, on peut l'appeler k, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}.$$

3)Pour $k\geq 1$, $N\geq 1$ et $a\in\mathbf{N}$, on a :

$$k\binom{k+a}{a}=k\times\frac{(k+a)!}{k!a!}=\frac{(k+a)!}{(k-1)!a!}=\frac{(k+a)!(a+1)}{(k-1)!a!(a+1)}=\frac{(k+a)!(a+1)}{(k-1)!(a+1)!}$$

$$=(a+1)\times\frac{(k+a)!}{\big((k+a)-(a+1)\big)!(a+1)!}=(a+1)\binom{k+a}{a+1}.$$

On déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{k+a}{a}&=\sum_{k=1}^{n}k\binom{k+a}{a}\ \text{ car le premier terme est nul}\\&=\sum_{k=1}^{n}(a+1)\binom{k+a}{a+1}\\&=(a+1)\sum_{k=1}^{n}\binom{k+a}{a+1}\\&=(a+1)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{j+a+1}{a+1}\ \text{ en posant } j=k-1\end{aligned}$$

Comme j est muet, on peut l'appeler k, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{k+a}{a}=(a+1)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+a+1}{a+1}.$$

4)La variable aléatoire $n-X$ est discrète finie. Elle admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$E(n-X)$$

$$=\sum_{x\in X(\Omega)}(n-x)P(X=x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$$

$= \dfrac{1}{\binom{n+b}{b}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\tbinom{n-k+b-1}{b-1}$
$= \dfrac{1}{\binom{n+b}{b}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} j\tbinom{j+b-1}{b-1}$ en posant $j = n-k$
$= \dfrac{b}{\binom{n+b}{b}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \tbinom{j+b}{b}$ grâce à la question 3) avec $a \to b-1$ et $N \to n$
$= \dfrac{b}{\binom{n+b}{b}} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \tbinom{j+b}{b} - \tbinom{n+b}{b} \right)$
$= \dfrac{b}{\binom{n+b}{b}} \left(\tbinom{n+b+1}{b+1} - \tbinom{n+b}{b} \right)$ grâce à la formule (S) avec $a \to b$ et $N \to n$
$= \dfrac{b}{\binom{n+b}{b}} \times \tbinom{n+b}{b+1}$ par la formule du triangle de Pascal
$= \dfrac{b}{\frac{(n+b)!}{n!b!}} \times \dfrac{(n+b)!}{(n-1)!(b+1)!}$
$= \dfrac{b! \times b \times n!}{(n-1)!(b+1)!}$
$= \dfrac{bn}{b+1}.$

Enfin, par linéarité de l'espérance, on a : $E(n-X) = n - E(X)$.

Cela mène à : $n - E(X) = \dfrac{bn}{b+1}$, d'où $E(X) = \dfrac{n}{b+1}$.

> ✓ pour $n = b = 2$, on retrouve le résultat trouvé en I.2), à savoir $E(X) = 2/3$.

5)Il faut procéder comme dans la question I.4)

On introduit pour tout entier $k \geq 1$ les événements suivants :

$B_k = \ll$ la k -ième boule tirée par le joueur B est blanche $\gg$,
$N_k = \ll$ la k -ième boule tirée par le joueur B est noire $\gg$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout entier $i \geq 1$, on a :

$P(X = k \cap Y = i)$
$= P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i)$
$= P(X = k) \times P(N_1 \cap ... \cap N_i \cap B_{i+1})$
$= P(X = k) \times P(N_1) \times \cdots \times P(N_i) \times P(B_{i+1})$ par indépendance (remise)

Or, $\forall j \in [\![1, i]\!]$, $P(N_j) = \dfrac{n-k}{(n+b)-(k+1)}$ et $P(B_{i+1}) = \dfrac{b-1}{(n+b)-(k+1)}$.

En effet, l'événement $(X = k)$ étant réalisé, $k+1$ boules ont été tirées de l'urne dont k noires et 1 blanche. Avant chaque tirage du joueur B, il reste alors dans l'urne $(n+b)-(k+1)$ boules dont $(n-k)$ noires et $b-1$ blanches.

Donc $P(X = k \cap Y = i) = P(X = k) \times \left(\dfrac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i \dfrac{b-1}{n+b-k-1}$.

6)$\forall k \in [\![0, n]\!], 0 \leq \dfrac{n-k}{n+b-k-1} < 1$ car $b \geq 2$ par énoncé.

La série $\displaystyle\sum_{i\geq 1} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ est une série convergente en tant que série dérivée première de paramètre appartenant à $]0, 1[$.

De plus, $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{b-1}{n+b-k-1}\right)^2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1} = \left(\frac{n+b-k-1}{b-1}\right)^2$.

7)La formule des probabilités totales pour le système complet $(X = k)_{0\leq k\leq n}$ donne pour tout entier $i \geq 1$:

$P(Y = i)$

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{n} P(X = k \cap Y = i)$

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \times \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i \frac{b-1}{n+b-k-1}$ grâce à la question II.5).

On déduit pour tout entier $p \geq 1$:

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} iP(Y = i)$

$\displaystyle= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{n} iP(X = k) \times \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i \frac{b-1}{n+b-k-1}$

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{p} iP(X = k) \times \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i \frac{b-1}{n+b-k-1}$

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \frac{b-1}{n+b-k-1} \sum_{i=1}^{p} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i$

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \frac{b-1}{n+b-k-1} \times \frac{n-k}{n+b-k-1} \sum_{i=1}^{p} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$

Passons à la limite quand $p \to +\infty$.

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{i=1}^{p} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1} = \left(\frac{n+b-k-1}{b-1}\right)^2$ d'après II.6)

Donc quand $p \to +\infty$, l'expression dans la première somme, à savoir : $P(X = k)\dfrac{b-1}{n+b-k-1}.\dfrac{n-k}{n+b-k-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} i\left(\dfrac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ tend vers $P(X = k)\dfrac{b-1}{n+b-k-1}.\dfrac{n-k}{n+b-k-1}\left(\dfrac{n+b-k-1}{b-1}\right)^{2}$, c'est-à-dire vers $\dfrac{n-k}{b-1}P(X=k)$.

Par somme finie de limites, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{i=1}^{p} iP(Y=i)$ existe et est finie, ce qui prouve que Y admet une espérance.

De plus,
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{b-1}P(X=k) \\ &= \frac{1}{b-1}\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X=k) \\ &= \frac{1}{b-1}E(n-X) \\ &= \frac{1}{b-1}\times\frac{bn}{b+1} \\ &= \frac{bn}{b^2-1}. \end{aligned}$$