Correction DM13 cubes

<u>Exercice :</u>

Partie I

1)$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n - U_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \ln(n+1)\right)$

$$= \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \quad (*)$$

$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Par ailleurs, en écrivant $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, on peut avoir l'idée d'utiliser le DL en 0 de $\frac{1}{1+x}$.

$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + o(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Donc $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En multipliant membre à membre par $\frac{1}{n}$, on déduit : $\frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Grâce à $(*)$, on déduit alors[1] : $U_n - U_{n+1} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $U_n - U_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.

2)$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge car elle a même nature que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.
D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} (U_n - U_{n+1})$ converge.
C'est une série télescopique convergente donc la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge.

Partie II

1)a)L'événement $(Y_2 > n)$ est réalisé si et seulement si il faut au moins $n+1$ pioches pour obtenir 2 boules distinctes, ce qui se produit si et seulement si les n premières pioches amènent le même numéro, c'est-à-dire si C_n est réalisé.
Donc $(Y_2 > n = C_n)$.

Pour tout entier $k \geq 1$, introduisons les événements :
D_k = « la k-ième pioche amène le numéro 1 »,
E_k = « la k-ième pioche amène le numéro 2 »,
F_k = « la k-ième pioche amène le numéro 3 ».
On a : $C_n = (D_1 \cap ... \cap D_n) \cup (E_1 \cap ... \cap E_n) \cup (F_1 \cap ... \cap F_n)$.

1. on a construit un développement asymptotique de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n+1}$

Par incompatibilité, puis indépendance (du fait de la remise), on a :

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P(D_1)\cdots P(D_n) + P(E_1)\cdots P(E_n) + P(F_1)\cdots P(F_n) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(Y_2 > n) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(ii)$Y_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Soit $n \geq 2$ un entier quelconque.
Comme Y_2 ne prend que des valeurs entières, l'événement $(Y_2 > n-1)$ est la réunion des événements (incompatibles) $(Y_2 > n)$ et $(Y_2 = n)$.

Donc $P(Y_2 > n-1) = P(Y_2 > n) + P(Y_2 = n)$.

On déduit :

$$\begin{aligned} P(Y_2 = n) &= P(Y_2 > n-1) - P(Y_2 > n) \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

b)•La formule des probabilités totales pour le système complet $(Y_2 = k)_{k \geq 2}$ donne :

$$\begin{aligned} P(Y_3 - Y_2 = n) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P\big((Y_3 - Y_2 = n) \cap (Y_2 = k)\big) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} P\big((Y_3 - k = n) \cap (Y_2 = k)\big) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} P\big((Y_3 = n + k) \cap (Y_2 = k)\big). \end{aligned}$$

• $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \geq 2,\ P\big((Y_3 = n+k) \cap (Y_2 = k)\big) = P_{(Y_2=k)}(Y_3 = n+k)P(Y_2 = k)$.
Calculons $P_{(Y_2=k)}(Y_3 = n+k)$. Supposons l'événement $(Y_2 = k)$ réalisé.
A l'issue du k-ième tirage, exactement deux numéros sont apparus.
Pour que l'événement $(Y_3 = n+k)$ se réalise, il faut et il suffit que :
− les tirages $k+1$, ..., $n+k-1$ amènent l'un de ces deux numéros, ce qui se produit avec la probabilité $2/3$ pour chacun de ces tirages,
− le tirage $n+k$ en amène un nouveau, ce qui se produit avec la probabilité $1/3$.

Donc $P_{(Y_2=k)}(Y_3 = n+k) = \underbrace{\frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{3}}_{n-1 \text{ facteurs}} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$.

Par ailleurs, d'après la question 1)a)ii), on a : $\forall k \geq 2,\ P(Y_2 = k) = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

On déduit $P_{(Y_2=k)}(Y_3 = n+k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} \times 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

D'où $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \geq 2,\ P(Y_3 = n + k \cap Y_2 = k) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2)a)• Pour obtenir i numéros distincts, il faut faire au minimum i pioches.
Donc $Y_i(\Omega) \subset [\![i, +\infty[\![$.

Réciproquement, soit $k \in [\![i, +\infty[\![$.
L'éventualité $(1, 2, ..., i-1, 1, ..., 1, \underbrace{i}_{\text{tirage } k}, ...)$ réalise l'événement $(Y_i = k)$.
Donc l'événement $(Y_i = k)$ n'est pas vide, ce qui signifie que $k \in Y_i(\Omega)$.
Donc $[\![i, +\infty[\![\subset Y_i(\Omega)$.
Finalement, $Y_i(\Omega) = [\![i, +\infty[\![$.

• $Y_{i+1} - Y_i$ désigne le nombre de pioches nécessaires pour obtenir $i+1$ numéros distincts, une fois qu'on a obtenu i numéros distincts.
Donc $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) \subset \mathbf{N}^*$.

Réciproquement, soit $k \in \mathbf{N}^*$.
L'éventualité $(1, 2, ..., i, \underbrace{1, ..., 1}_{k-1 \text{ fois}}, i+1, ...)$ réalise l'événement $(Y_{i+1} - Y_i = k)$.
Donc l'événement $(Y_{i+1} - Y_i = k)$ n'est pas vide, ce qui signifie que $k \in (Y_{i+1} - Y_i)(\Omega)$.
Donc $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

b)Supposons l'événement $(Y_i = k)$ réalisé.
Alors, les k premiers tirages amènent i numéros différents.
L'événement $(Y_{i+1} - Y_i = n)$ se réalise si et seulement si :
– aux $n-1$ tirages numéro $k+1$, ..., $k+n-1$, on tire un numéro déjà sorti précédemment, ce qui se produit avec la probabilité de $\left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}$ puisqu'il y a pour chacun de ces tirages, i numéros possibles parmi r,
– au tirage numéro $k+n$, on tire un nouveau numéro, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{r-i}{r} = 1 - \frac{i}{r}$.
Par indépendance des tirages, on obtient en multipliant les probabilités précédentes :

$$\forall n \geq 1, \forall k \geq i,\ P_{(Y_i=k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

c)•La formule des probabilités totales pour le système complet $(Y_i = k)_{k \geq i}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(Y_{i+1} - Y_i = n) &= \sum_{k=i}^{+\infty} P\big((Y_{i+1} - Y_i = n) \cap (Y_i = k)\big) \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} P_{(Y_i=k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) P(Y_i = k) \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right) P(Y_i = k) \\
&= \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right) \underbrace{\sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k)}_{=1}
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right)$.

Donc $Y_{i+1} - Y_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - \frac{i}{r}\right)$.

On déduit facilement par le cours :

$E(Y_{i+1} - Y_i) = \dfrac{r}{r-i}$ et $V(Y_{i+1} - Y_i) = \dfrac{ri}{(r-i)^2}$.

3)a)(i)Par télescopage, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i}) = Y_r - Y_1 = Y_r - 1$.

Donc $Y_r = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$.

(ii)Par linéarité de l'espérance, on déduit :

$$\begin{aligned}
E(Y_r) &= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} E\left(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}\right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{r-(r-i)} \quad \text{en utilisant 2)c) avec } i \to r-i \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{r}{i} \\
&= r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

Par indépendance des variables aléatoires $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, ..., Y_r - Y_{r-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\text{Puis, } V(Y_r) &= V\left(1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})\right) \\
&= V\left(\sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} V\left(Y_{r-i+1} - Y_{r-i}\right) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r(r-i)}{\left(r-(r-i)\right)^2} \quad \text{en utilisant 2)c) avec } i \to r-i \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r^2 - ri}{i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{r^2 - ri}{i^2} \quad \text{car le terme est nul pour } i = r \\
&= r^2\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

b)D'après la partie I, la suite $(U_r)_{r\geq 1}$ est convergente. Notons α sa limite.

- On a alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} - \ln r - \alpha\right) = 0$ ou encore $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \underset{r\to+\infty}{=} \ln r + \alpha + o(1)$.

En multipliant par r membre à membre, on déduit :

$$r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i} \underset{r\to+\infty}{=} r\ln r + \alpha r + o(r) \quad (1)$$

Donc $E(Y_r) = r\ln r + \alpha r + o(r)$.

• La série $\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i^2}$ est convergente. Notons $\beta = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2}$.

On a alors $\beta > 0$ et $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2} \underset{r\to+\infty}{\sim} \beta$.

Puis $r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2} \underset{r\to+\infty}{\sim} \beta r^2$, ce qui signifie que $r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2} \underset{r\to+\infty}{=} \beta r^2 + o(r^2) \quad (2)$

Par différence de (2) et (1), on a :

$$r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2} - r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i} \underset{r\to+\infty}{=} \beta r^2 + o(r^2) - \big(r\ln r + \alpha r + o(r)\big)$$

Donc $V(Y_r) \underset{+\infty}{=} \beta r^2 + o(r^2) - \underbrace{r\ln r}_{o(r^2)} - \underbrace{\alpha r}_{o(r^2)} - \underbrace{o(r)}_{o(r^2)}$.

Donc $V(Y_r) \underset{+\infty}{\sim} \beta r^2$.