correction DS2 Cubes

Exercice 1 (eml 2019)

Partie A

1)A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Ainsi, $sp(A) = \{1, 1/2, 2\}$.

0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

2)Cherchons les sous-espaces propres de A.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A - I)U = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} - & y & + & z & = 0 \\ -\frac{1}{2} & y & & & = 0 \\ & & & z & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, y = 0, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned}
U \in E_{1/2}(A) &\iff \left(A - \frac{1}{2} I \right) U = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{2} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & \frac{3}{2} z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_{1/2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = 2y, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$U \in E_2(A) \Longleftrightarrow (A-2I)\,U = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrrrl} - & x & - & & y & + & z = 0 \\ & & - & \frac{3}{2} & y & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = z, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

A est diagonalisable donc il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A.

Les colonnes de P sont constituées des bases des sous-espaces propres rangées dans le même ordre que D.

Comme les valeurs propres doivent être rangées dans l'ordre croissant, cela impose de prendre :

$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3)On trouve : $Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et $QDQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = D^{-1}$.

4)On a les équivalences suivantes :

$QDQ = D^{-1} \Longleftrightarrow Q^{-1}QDQQ^{-1} = Q^{-1}D^{-1}Q^{-1} \Longleftrightarrow D = Q^{-1}D^{-1}Q^{-1}(1)$

$A = PDP^{-1} \Longleftrightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \Longleftrightarrow D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P \quad (2)$

On déduit :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= PQ^{-1}D^{-1}Q^{-1}P^{-1} \quad \text{grâce à (1)} \\ &= PQ^{-1}P^{-1}A^{-1}PQ^{-1}P^{-1} \quad \text{grâce à (2)} \\ &= PQP^{-1}A^{-1}PQ^{-1}P^{-1} \quad \text{car } Q^2 = I \Longleftrightarrow Q^{-1} = Q \\ &= \left(PQ^{-1}P^{-1}\right)^{-1} A^{-1} \left(PQ^{-1}P^{-1}\right). \end{aligned}$$

Posons $R = PQ^{-1}P^{-1}$. On a alors : $A = R^{-1}A^{-1}R$ donc A et A^{-1} sont semblables.

Partie B

5)Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0) = e_1$,
$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,0,1) = e_3$,
$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1,2) = -1e_2 + 2e_3$.
Donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

L'opération de Gauss $L_2 \leftrightarrow L_3$ transforme M en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrice inversible car triangulaire sans zéro sur la diagonale.
Donc M est inversible.

6)a)Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(M) &\iff (M - I)U = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ &\iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff y = -z \end{aligned}$$

Donc $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, y = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix}, (x,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (x,z) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Donc $E_1(f) = \mathrm{Vect}\,(u_1, -u_2) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.
$E_1(f)$ est non vide donc 1 est bien valeur propre de f.
De plus, (u_1, u_2) est une famille génératrice de $E_1(f)$ et elle est libre car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.
Ainsi, (u_1, u_2) est une base de $E_1(f)$.

6)b)Posons $u_3 = (x, y, z)$.

$$\begin{aligned} f(u_3) - u_3 = u_2 &\iff (x, -z, y + 2z) - (x, y, z) = (0, 1, -1) \\ &\iff (0, -z - y, y + z) = (0, 1, -1) \qquad . \\ &\iff y + z = -1 \end{aligned}$$

On peut prendre par exemple : $x = 0$, $y = -1$ et $z = 0$, ce qui donne $u_3 = (0, -1, 0)$.

6)c)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff a(1,0,0) + b(0,1,-1) + c(0,-1,0) = (0,0,0) \\ &\iff (a, b-c, -b) = (0,0,0) \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}.$$

La famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est donc libre et de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

7)a)Comme u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de f associés à 1, on a : $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.

Par ailleurs, $f(u_3) = u_2 + u_3$ d'après la question 6)b).

Donc $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$.

Donc $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7)b)M_1 et M_2 représentent la matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
Elles sont donc semblables.

On trouve $M_1 M_2 = I$.

8)M et M_1 représentent la matrice de f dans deux bases différentes.
Elles sont donc semblables.
Il existe donc une matrice P inversible telle que $M = P^{-1} M_1 P$ (1)

On déduit : $M^{-1} = P^{-1} M_1^{-1} P = P^{-1} M_2 P$, d'où $M_2 = P M^{-1} P^{-1}$ (2)

Par ailleurs, comme M_1 et M_2 sont semblables, il existe une matrice Q inversible telle que $M_1 = Q^{-1} M_2 Q$ (3)

De (1) et (3), on déduit : $M = P^{-1} Q^{-1} M_2 Q P$.

Puis, en utilisant (2) : $M = P^{-1} Q^{-1} P M^{-1} P^{-1} Q P = \left(P^{-1} Q P\right)^{-1} M^{-1} \left(P^{-1} Q P\right)$.

Posons $R = P^{-1} Q P$. On a alors : $M = R^{-1} M^{-1} R$.

Donc M et M^{-1} sont semblables.

Partie C

9)T est triangulaire et ses éléments diagonaux sont non nuls.
Donc T est inversible.

Supposons que T soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que $T = PTP^{-1}$ (1)
T est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Donc 1 est l'unique valeur propre de T.
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de T donc $D = I$.
En remplaçant dans (1), on a : $T = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.
Donc T n'est pas diagonalisable.

10)a)On a : $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On déduit en développant :

$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 - N^3 = I_3$.

10)b)$N = T - I_3$ donc $I_3 + N = T$. La question 10)a) donne :

$T(I_3 - N + N^2) = I$.
Donc T est inversible et $T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

11)a)N^2 est la matrice de gog dans la base canonique. Comme $N^2 \neq 0$, gog n'est pas l'endomorphisme nul.
Il existe donc un vecteur u de $\mathbf{R}^3$ tel que $gog(u) \neq 0$.
Puis, $N^3 = 0$ donc $gogog = 0$, ce qui entraîne que $gogog(u) = 0$.

11)b)Soient a, b et c des réels tels que $agog(u) + bg(u) + cu = 0$ $(*)$

En appliquant gog dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de gog, on obtient :

$ag^4(u) + bg^3(u) + cgog(u) = 0$, c'est-à-dire : $cgog(u) = 0$ puisque g^3 et g^4 sont les endomorphismes nuls.

Comme $gog(u) \neq 0$, on a donc $c = 0$.

En reportant dans $(*)$, on a : $agog(u) + bg(u) = 0$ $(**)$

En appliquant g dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de g, on obtient :

$ag^3(u) + bgog(u) = 0$, c'est-à-dire $bgog(u) = 0$, ce qui mène à $b = 0$.

En reportant dans $(**)$, on a : $agog(u) = 0$, ce qui donne $a = 0$.

Donc la famille $\mathscr{B}_3 = (gog(u), g(u), u)$ est libre. Elle est de cardinal 3 qui coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

11)c)$g\left(gog(u)\right) = g^3(u) = 0 = 0gog(u) + 0g(u) + 0u$,
$g(g(u)) = gog(u) = 1gog(u) + 0g(u) + 0u$,
$g(u) = 0gog(u) + 1g(u) + 0u$.

Donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11)d)$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que $N^2 - N = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_3}(g)$.
Par ailleurs, N est la matrice de g dans la base canonique.
$N^2 - N$ et N sont donc les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont donc semblables.

12)D'après la question 10)b), $T^{-1} = I_3 + N^2 - N \quad (*)$

Comme $N^2 - N$ et N sont semblables, il existe une matrice P inversible telle que $N^2 - N = P^{-1}NP$.

En remplaçant dans $(*)$, on déduit :

$T^{-1} = I_3 + P^{-1}NP = P^{-1}I_3P + P^{-1}NP = P^{-1}\left(I_3 + N\right)P = P^{-1}TP.$

Donc T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2 (ecricome zéro retouché)

Partie I

1)fonction *fibo(n)*

```
def fibo(n):
    u=0
    v=1
    for k in range(1,n+1):
        w=u+v
        u=v
        v=w
    return u
```

Ou plus simplement, en utilisant des affectations parallèles :

```
def fibo(n):
    u,v=0,1
    for k in range(1,n+1):
        u,v=v,u+v
    return u
```

2)a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $F_{n+1} > F_n > 0$ ».

$\mathscr{P}(2)$ s'écrit : « $F_3 > F_2 > 0$ ».
C'est vrai car $F_2 = F_1 + F_0 = 1$ et $F_3 = F_2 + F_1 = 2$.

Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
$F_{n+2} - F_{n+1} = F_n > 0$ par hypothèse de récurrence. Donc $F_{n+2} > F_{n+1}$.
Puis, $F_{n+1} > 0$ par hypothèse de récurrence. Donc $F_{n+2} > F_{n+1} > 0$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \geq 2,\ F_{n+1} > F_n > 0$.

2)b)La suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est linéaire d'ordre deux.
L'équation caractéristique associée est : $x^2 - x - 1 = 0$.
Les racines sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
D'après le cours, il existe des réels α et β telles que
$\forall n \in \mathbf{N},\ F_n = \alpha(x_1)^n + \beta(x_2)^n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

L'égalité précédente donne pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} F_0 &= \alpha + \beta \\ F_1 &= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta & = -\alpha \\ 1 & = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta & = -\alpha \\ 1 & = \sqrt{5}\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta & = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha & = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

On a donc $\forall n \in \mathbf{N},\ F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

2)c)$2 < \sqrt{5} < 3$ donc $\dfrac{3}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$,
$-3 < -\sqrt{5} < -2$ donc $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < -\dfrac{1}{2}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$.
On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

3)fonction *recherche*(x, L)

```
def recherche(x,L):
    k=0
    while L[k]<=x:
        k=k+1
    return L[k-1]
```

Partie II

4)a)Dans la décomposition de Zuckendorf, les termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne doivent pas être consécutifs du fait de la contrainte $c_{i+1} > c_i + 1$.
Donc la décomposition de Zuckendorf de 6 est $6 = 1 + 5 = F_2 + F_5$.

4)b)$35 = 34 + 1 = F_2 + F_9$.

4)c)$130 = 89 + 34 + 5 + 2 = F_{11} + F_9 + F_5 + F_3$.

5)a)$F_1 = 1$ et $n \geq 1$. Donc $F_1 \leq n$ ce qui prouve que $1 \in A_n$.
Ainsi, A_n est non vide.
Comme $\lim\limits_{i\to+\infty} F_i = +\infty$, il existe un entier i_0 tel que $\forall i \geq i_0,\ F_i > n$.
Les entiers i tels que $i \geq i_0$ n'appartiennent donc pas à A_n.
On a alors $A_n \subset [\![1, i_0 - 1]\!]$, ce qui prouve que A_n est finie.

5)b)$F_2 = 1$ et $n \geq 1$. Donc $F_2 \leq n$ ce qui prouve que $2 \in A_n$.
j étant le plus grand des éléments de A_n, on a donc $j \geq 2$.

$j \in A_n$ donc $F_j \leq n$ par définition de A_n.

Comme $j = max(A_n)$, on a : $j+1 \notin A_n$ donc $F_{j+1} > n$.

Ainsi, $F_j \leq n < F_{j+1}$.

5)c)L'inégalité $n < F_{j+1}$ donne :

$n - F_j < F_{j+1} - F_j$, c'est-à-dire $n - F_j < F_{j-1}$.

5)d)L'hypothèse $n - F_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} F_{d_i}$ et la question 5)c) donnent :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{l} F_{d_i} < F_{j-1}$.

Or, $F_{d_l} \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{l} F_{d_i}$ car les termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont positifs ou nuls.

Par recollement des inégalités, $F_{d_l} < F_{j-1}$.

La suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant strictement croissante, cela entraîne que $d_l < j-1$, c'est-à-dire $j > d_l + 1 \quad (*)$

Posons $k = l+1 \geq 2$ et $(c_1, ..., c_{k-1}, c_k) = (d_1, ..., d_{k-1}, j)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} n &= F_j + \sum_{i=1}^{l} F_{d_i} \text{ grâce à l'hypothèse} \\ &= F_{c_k} + \sum_{i=1}^{k-1} F_{c_i} \text{ car } j = c_k \text{ et } l = k-1 \\ &= \sum_{i=1}^{k} F_{c_i}. \end{aligned}$$

Il reste à voir que c_1, ..., c_k vérifient les contraintes demandées :

• $c_1 = d_1 \geq 2$,

• par hypothèse, on a : $\forall i \in [\![1, l-1]\!],\ d_{i+1} > d_i + 1$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1, k-2]\!],\ c_{i+1} > c_i + 1$.

• $c_k = j$ et $j > d_l + 1$ grâce à $(*)$ donc $c_k > d_l + 1$.
Or, $d_l = d_{k-1} = c_{k-1}$ donc $c_k > c_{k-1} + 1$, ce qui montre l'inégalité du deuxième point pour $i = k-1$.

On a bien finalement :

$c_1 \geq 2, \quad \forall i \in [\![1, k-1]\!],\ c_{i+1} > c_i + 1$ et $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} F_{c_i}$.

6)programme :

```
def Zeckendorf(n):
#construction de la liste des termes Fn inférieurs ou égaux à n
    i=0
    L=[fibo(i)]
    while L[i]<=n:
        i=i+1
        L.append(fibo(i))
#construction de la décomposition de Zeckendorf
    k=n
    T=[]
    while k>0:
        f=recherche(k,L)
        T.append(f)
        k=k-f
    return T
```

Quelques explications ...Prenons par exemple $n = 50$.

La première partie du programme construit la liste L de tous les termes F_i inférieurs ou égaux à n plus le premier terme F_i strictement supérieur à n. On obtient : $L = [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]$.

La deuxième partie du programme construit la décomposition de Zeckendorf de n sous forme d'une liste T.

k=50,
T est vide,
début de boucle
f=recherche(50,L) donc f=34
T=[34]
k=50-34=16
fin de boucle
début de boucle
f=recherche(16,L) donc f=13
T=[34,13]
k=16-13=3
fin de boucle
début de boucle
f=recherche(3,L) donc f=3
T=[34,13,3]
k=3-3=0
fin de boucle
On sort de la boucle car k=0
On retourne T=[34,13,3] qui est la décomposition de Zeckendorf de 50.

Exercice 3 (ecricome zéro)

1)$x \mapsto 1-x$ est polynomiale, de classe C^∞ sur $[0,1[$ et prend ses valeurs dans $]0,1]$.
$x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $]0,1]$.
Par composition, $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est de classe C^∞ sur $[0,1[$.
Par inverse, f est de classe C^∞ sur $[0,1[$.

2)a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition :
$$\ll \forall x \in [0,1[\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt. \gg$$

• $\mathscr{P}(0)$ s'écrit :$\ll \forall x \in [0,1[\,,\ f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)dt. \gg$
Elle est vraie car $\displaystyle\int_0^x f'(t)dt = \big[f(t)\big]_0^x = f(x) - f(0)$.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Soit $x \in [0,1[$. Par hypothèse de récurrence, on a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \quad (*)$$
Effectuons une IPP dans $\displaystyle\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$ en posant :
$$u(t) = f^{(n+1)}(t) \quad v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$
$$u'(t) = f^{(n+2)}(t) \quad v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$
u et v sont de classe C^1 sur $[0,x]$. L'IPP est licite et donne :
$$\begin{aligned}\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt \\ &= f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt.\end{aligned}$$
En substituant dans $(*)$, on obtient :
$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt.\end{aligned}$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

• Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

✓ On vient de montrer la formule de Taylor avec reste intégral.

b)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\forall x \in [0,1[\,,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$ ».

• $\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $\forall x \in [0,1[\,,\ f^{(0)}(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ».
Elle est vraie car $f^{(0)}(x) = f(x)$ et $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left[f^{(n)}(x)\right]' \\
&= \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}\right]' \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-n-\frac{1}{2}\right) \times (-1) \times (1-x)^{-n-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{(2n)!(2n+1)}{2^{2n}n! \times 2}(1-x)^{-n-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}(1-x)^{-n-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{(2n+1)!(2n+2)}{2^{2n+1}n! \times 2(n+1)}(1-x)^{-n-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}(1-x)^{-n-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

• Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

c)Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}(1-t)^{-n-\frac{3}{2}}\frac{(x-t)^n}{n!}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\frac{x^k}{4^k} + \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!n!}\int_0^x (1-t)^{-n}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(x-t)^n dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{(2n+2)!(n+1)}{2^{2n+2}(n+1)!n!(n+1)}\int_0^x \frac{1}{(1-t)^n}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(x-t)^n dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{(2n+2)!(n+1)}{2^{2n+2}(n+1)!(n+1)!}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt.
\end{aligned}$$

3)Soit x un réel de $]0,1[$.

a)φ_x est dérivable sur $[0,x]$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall t \in [0,x]\,,\ \varphi_x'(t) = \dfrac{-1(1-t)+(x-t)}{(1-t)^2} = \dfrac{x-1}{(1-t)^2} < 0$ car $x \in\,]0,1[$ et $(1-t)^2 > 0$.

Donc φ_x est décroissante sur $[0,x]$.

t	0		x
$\varphi_x(t)$	x	$\searrow$	0

b)D'après le tableau de variations, on a $\forall t \in [0,x]\,,\ 0 \le \varphi_x(t) \le x$.

La fonction $z \mapsto z^n$ étant croissante sur $\mathbf{R}_+$, on déduit :

$\forall t \in [0,x]\,,\ 0 \le \varphi_x(t)^n \le x^n$, puis en multipliant par $(1-t)^{-\frac{3}{2}}$:

$\forall t \in [0,x]\,,\ 0 \le (1-t)^{-\frac{3}{2}}\varphi_x(t)^n \le x^n(1-t)^{-\frac{3}{2}}$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et x, on obtient :

$$0 \le \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\varphi_x(t)^n dt \le \int_0^x x^n(1-t)^{-\frac{3}{2}}dt$$

$$0 \le \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \le x^n \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}dt \quad (*)$$

Avec $\displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}dt = \left[\frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{1/2}\right]_0^x = \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{1/2} - \frac{1}{1/2} = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2$

En injectant dans $(*)$, on conclut que

$$0 \le \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \le 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

c)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$.

La formule de Stirling donne :

$(2n+2)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n+2)}(2n+2)^{2n+2}e^{-(2n+2)}$

ou encore $(2n+2)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi(n+1)}2^{2n+2}(n+1)^{2n+2}e^{-(2n+2)} \quad (1)$

$(n+1)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}$

donc $(n+1)!^2 \underset{+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\right)^2$

ou encore $(n+1)!^2 \underset{+\infty}{\sim} 2\pi(n+1)(n+1)^{2n+2}e^{-(2n+2)} \quad (2)$

Le quotient de (1) par (2) donne :

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi(n+1)}2^{2n+2}\cancel{(n+1)^{2n+2}e^{-(2n+2)}}}{2\pi(n+1)\cancel{(n+1)^{2n+2}e^{-(2n+2)}}}$$

En multipliant dans chaque membre par $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}$, on déduit :

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{2^{2n+2}}}\frac{\sqrt{4\pi(n+1)}\cancel{2^{2n+2}}}{2\pi\cancel{(n+1)}} = \frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}{2\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{\pi}.$$

D'où, $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$.

d)Dans l'inégalité 3)b), on multiplie membre à membre par $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1}$:

$$0 \leq \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).$$

Compte-tenu de l'équivalent trouvé dans la question 3)c), on a :

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (par croissances comparées) car il est de la forme $K(x)n^{1/2}x^n$ avec $0 < x < 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right) = 0$.

La propriété des gendarmes donne enfin :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt = 0.$$

4)Soit x un réel de $]0,1[$.

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité 2)c), on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k = f(x).$$

C'est une limite finie.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ est donc convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$