Exercice 1 (edhec 2018)

1)det $A = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A n'est pas inversible.

2)λ est valeur propre de A
$\iff A - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff \det(A - \lambda I) = 0$
$\iff (1-\lambda)(6-\lambda) - 2 \times 3 = 0$
$\iff \lambda^2 - 7\lambda = 0$
$\iff \lambda(\lambda - 7) = 0$
$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 7$.

Déterminons les sous-espaces propres de A associés à 0 et à 7.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} U \in E_0(A) &\iff AU = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & 6y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = -2y \end{aligned}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = -2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned} U \in E_7(A) &\iff (A - 7I)U = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = 3x \end{aligned}$$

Donc $E_7(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

3)Pour toutes M et N dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = A\lambda M + AN = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$.
Donc f est linéaire.

De plus, $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), f(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Donc f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

4)a)Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker} f &\iff f(M)=0\\
&\iff AM=0\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t\\ 3x+6z & 3y+6t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2z & = & 0\\ y & + & 2t & = & 0\\ 3x & + & 6z & = & 0\\ 3y & + & 6t & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2z\\ y & = & -2t\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \operatorname{Ker} f &= \left\{\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix} \mid x=-2z, y=-2t\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix} -2z & -2t\\ z & t\end{pmatrix}, (z,t)\in \mathbf{R}^2\right\}\\
&=\left\{z\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, (z,t)\in \mathbf{R}^2\right\}\\
&=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$.

C'est aussi une famille libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires.

Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim Kerf = 2$.

b)Le théorème du rang donne : $\dim \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) = \dim Kerf + \dim Imf$.

Donc $\dim Imf = \dim \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) - \dim Kerf = 4-2 = 2$.

c)$f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix} = E_1 + 3E_3$,

$f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix} = E_2 + 3E_4$,

$f(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 6 & 0\end{pmatrix} = 2E_1 + 6E_3$,

$f(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix} = 2E_2 + 6E_4$.

D'après le cours, $Imf = \operatorname{Vect}\big(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)\big)$.

Or, $f(E_3) = 2f(E_1)$ et $f(E_4) = 2f(E_2)$.

Donc $Imf = \text{Vect}\left(f(E_1), f(E_2)\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de Imf de cardinal 2 coïncidant avec la dimension de Imf.C'est donc une base de Imf.

5)a)Les calculs faits dans la question 4)c) donnent immédiatement :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b)• Pour le rang de B, c'est immédiat car $rg(B) = rg(f) = dimImf = 2$.

• $B - 7I_4 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ${}^t(B - 7I_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ont même rang.

En notant C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de cette matrice transposée, on remarque que $C_1 = -2C_3$ et $C_2 = -2C_4$.

Donc $rg\,(B - 7I_4) = rg(C_3, C_4) = 2$ car la famille (C_3, C_4) est libre.

c)Le cours donne :

D'une part, $dimE_0(B) + rg(B) = 4$ d'où $dimE_0(B) = 2$.

D'autre part, $dimE_7(B) + rg(B - 7I_4) = 4$ d'où $dimE_7(B) = 2$.

$E_0(B)$ et $E_7(B)$ sont donc non nuls, ce qui prouve que 0 et 7 sont des valeurs propres de B.

B peut-il avoir une autre valeur propre λ autre que 0 et 7 ?
Supposons que ce soit le cas. On aurait alors $dimE_\lambda(B) \geq 1$, ce qui mènerait à : $dimE_0(B) + dimE_7(B) + dimE_\lambda(B) \geq 5$.
C'est impossible car la somme des dimensions des sous-espaces propres de B est inférieure ou égal à 4. Ainsi, $sp(B) = \{0, 7\}$.

Enfin, $dimE_0(B) + dimE_7(B) = 4$ et $B \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$. D'après le théorème de réduction, B est diagonalisable.

6)λ est valeur propre de B

$\Longleftrightarrow B - \lambda I_4$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow f - \lambda\text{Id}$ n'est pas bijective   car $B - \lambda I_4 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f - \lambda\text{Id})$

$\Longleftrightarrow f - \lambda\text{Id}$ n'est pas injective car $f - \lambda\text{Id}$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

$\Longleftrightarrow Ker(f - \lambda\text{Id}) \neq \{0\}$

$\Longleftrightarrow \exists M \neq 0 \mid (f - \lambda\text{Id})(M) = 0$

$\Longleftrightarrow \exists M \neq 0 \mid f(M) = \lambda M$.

7)Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

a)$X \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbf{R})$ et ${}^tX \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Par produit, $V = X^tX \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

b)X est un vecteur propre de A associé à λ donc $AX = \lambda X$.

Et $f(V) = f\left(X^tX\right) = A\left(X^tX\right) = (AX)^tX = (\lambda X)^tX = \lambda(X^tX) = \lambda V$.

c)Il reste à vérifier que $V \neq 0$. Posons $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On a alors : $V = X^tX = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Comme $X \neq 0$, soit $\alpha \neq 0$, soit $\beta \neq 0$. Dans les deux cas, cela entraîne que $V \neq 0$.

On a montré que $V \neq 0$ et que $f(V) = \lambda V$.

D'après la question 6), on conclut que λ est valeur propre de B.

8)Soit λ une valeur propre de B. Il existe alors $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ non nulle telle que $f(M) = \lambda M$.

Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$f(M) = \lambda M$

$\iff AM = \lambda M$

$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$.

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & bz & = & \lambda x \\ ay & + & bt & = & \lambda y \\ cx & + & dz & = & \lambda z \\ cy & + & dt & = & \lambda t \end{array} \right.$$

Compte tenu du système obtenu ci-dessus, on déduit :

$AC_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz \\ cx+dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda z \end{pmatrix} = \lambda C_1$.

$AC_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay+bt \\ cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda t \end{pmatrix} = \lambda C_2$.

Comme M est non nulle, l'une de ses colonnes au moins n'est pas nulle.
Donc $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$.

C_1 ou C_2 est donc vecteur propre de A associé à λ.
En conséquence, λ est valeur propre de A.

> La question 7) montre que si λ est valeur propre de A, alors λ est valeur propre de B. La question 8) montre la réciproque.
> Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est valeur propre de B.
> En conclusion, A et B ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 2 (edhec 2018)

1)a)La formule des probabilités totales pour le sce (A_0, A_1, A_2) s'écrit :

$$\begin{aligned}P(X=1) &= P(P_1)\\ &= P_{A_0}(P_1)P(A_0) + P_{A_1}(P_1)P(A_1) + P_{A_1}(P_1)P(A_2)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b)Soit $n \geq 2$. La même formule des probabilités totales donne :

$$P(X=n) = P_{A_0}(X=n)\times\frac{1}{3} + P_{A_1}(X=n)\times\frac{1}{3} + P_{A_1}(X=n)\times\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}P_{A_0}(X=n) &= P_{A_0}(F_1\cap ... \cap F_{n-1}\cap P_n)\\ &= P_{A_0}(F_1)\times\cdots\times P_{A_0}(F_{n-1})\times P_{A_0}(P_n) \quad \text{par indépendance des lancers}\\ &= \frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

$P_{A_1}(X=n) = P_{A_1}(F_1\cap ... \cap F_{n-1}\cap P_n) = 0$ car aucun pile ne peut être réalisé avec la pièce 1, puisqu'elle fait toujours face.

$P_{A_2}(X=n) = P_{A_2}(F_1\cap ... \cap F_{n-1}\cap P_n) = 0$ car aucun face ne peut être réalisé avec la pièce 1, puisqu'elle fait toujours pile.

On déduit que $\forall n\geq 2,\ P(X=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c)$X(\Omega) = \mathbf{N}$. La famille d'événements $(X=n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc un système complet.

On déduit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}P(X=0) &= 1 - P(X=1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)\\ &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \quad \text{en posant } k=n-2\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2)• X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ est absolument convergente, ce qui se ramène à la convergence simple car le terme général est positif.

$\forall n \geq 2,\ nP(X=n) = n\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{6}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série dérivée première de paramètre $1/2 \in]-1,1[$.

Elle est donc convergente.

La série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ est de même nature donc convergente.

Donc X admet une espérance.

$$\bullet\ E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)$$
$$= 0P(X=0) + 1P(X=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n)$$
$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1.$$

3)• D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)P(X=n)$ est absolument convergente, ce qui se ramène à la convergence simple car le terme général est positif.

$\forall n \geq 2,\ n(n-1)P(X=n) = n(n-1)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{12}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

$\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ est une série dérivée 2nde de paramètre $1/2 \in]-1,1[$.

Elle est donc convergente.

La série $\sum_{n\geq 0} n(n-1)P(X=n)$ est de même nature donc convergente.

Donc $X(X-1)$ admet une espérance.

$$\bullet\ E\big(X(X-1)\big) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$$
$$= \frac{1}{12}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{1}{12} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$
$$= \frac{4}{3}.$$

• L'égalité $X^2 = X(X-1) + X$ montre que X^2 admet une espérance.

Par linéarité, $E\big(X^2\big) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$.

X admet donc une variance donnée par la formule de Koenig :

$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - 1^2 = \frac{4}{3}$.

4)C'est une histoire de symétrie. Si dans les questions 1)a) et 1)b), on change X en Y, cela revient à échanger pile et face, ce qui mène aux mêmes calculs.
Donc Y suit la même loi que X.

5)a)Soit $j \geq 2$ un entier.

On a l'inclusion évidente : $\big((X=1)\cap(Y=j)\big) \subset (Y=j)$.

Réciproquement, supposons $(Y=j)$ réalisé. Cela signifie que la premier face est apparu au j-ème lancer. Comme $j \geq 2$, cela impose que le premier lancer est pile, ce qui réalise $(X=1)$.

Donc $(Y=j) \subset \big((X=1)\cap(Y=j)\big)$.

On conclut que $\big((X=1)\cap(Y=j)\big) = (Y=j)$, puis en passant à la probabilité :

$\forall j \geq 2,\ P\big((X=1)\cap(Y=j)\big) = P(Y=j)$.

b)Même raisonnement en échangeant le role de pile et face.

Donc $\forall j \geq 2,\ P\big((X=i)\cap(Y=1)\big) = P(X=i)$.

6)a)Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbf{N}$.

• $(X+Y=0) = (X=0)\cap(Y=0)$ est un événement impossible car il se réalise si on ne fait jamais pile et jamais face !

• L'événement $(X+Y=2)$ est la réunion des 3 événements incompatibles :

$\big(\underbrace{(X=0)}_{\text{0 pile}}\cap\underbrace{(Y=2)}_{P_1\cap F_2}\big)$, $\big(\underbrace{(X=1)}_{P_1}\cap\underbrace{(Y=1)}_{F_1}\big)$, $\big(\underbrace{(X=2)}_{F_1\cap P_2}\cap\underbrace{(Y=0)}_{\text{0 face}}\big)$

L'événement $(X+Y=2)$ est donc impossible.

• Ainsi, $X+Y$ ne peut pas prendre la valeur 0 ou 2. Les autres valeurs entières sont en revanche possibles.
Par exemple, si on lance la pièce 1, les événements $(X=0)$ et $(Y=1)$ sont réalisés. Donc $X+Y=1$.
Et pour $n \geq 3$, on peut par exemple réaliser l'événement $(X+Y=n)$ en lançant la pièce 0 et en faisant $P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_{n-2} \cap F_{n-1}$ (on a : $X=1$ et $Y=n-1$).
b)$(X+Y=1) = \big((X=0)\cap(Y=1)\big) \cup \big((X=1)\cap(Y=0)\big)$.
Or, $(X=0) \subset (Y=1)$ car si l'on ne fait jamais pile, on fait nécessairement face au premier lancer.
Donc $\big((X=0)\cap(Y=1)\big) = (X=0)$.
De même, $(Y=0) \subset (X=1)$ donc $\big((X=1)\cap(Y=0)\big) = (Y=0)$.
Ainsi, $(X+Y=1) = (X=0) \cup (Y=0)$.
Les événements $(X=0)$ et $(Y=0)$ sont incompatibles.
Donc $P(X+Y=1) = P(X=0)+P(Y=0) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
c)On peut remarquer que $\big((X=1),(Y=1)\big)$ est un système complet.
En effet, on a : $(X=1)\cap(Y=1) = \emptyset$.
De plus, on a : $(X=1)\cup(Y=1)=\Omega$, puisqu'au premier lancer on fait soit pile, ce qui réalise $(X=1)$, soit face, ce qui réalise $(Y=1)$.
On déduit pour tout entier $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
&(X+Y=n)\\
&= \big((X+Y=n)\cap(X=1)\big) \cup \big((X+Y=n)\cap(Y=1)\big)\\
&= \big((X=1)\cap(Y=n-1)\big) \cup \big((X=n-1)\cap(Y=1)\big).
\end{aligned}$$

d)On conclut :

$$\begin{aligned}
&P(X+Y=n)\\
&= P\big((X=1)\cap(Y=n-1)\big) + P\big((X=n-1)\cap(Y=1)\big)\\
&= P(Y=n-1)+P(X=n-1) \quad \text{grâce à 5) avec } n-1 \geq 2\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{grâce à 1)b)) avec } n-1 \geq 2\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

7)a)programme :

```
import numpy.random as rd
piece=rd.randint(0,3)
x=1
if piece==0:
    lancer=rd.randint(0,2)
    while lancer==0:
        lancer=rd.randint(0,2)
        x=x+1
if piece==1:
    x=0
print(x)
```

b)Si le joueur lance avec la pièce 2, elle fait nécessairement pile au premier lancer, ce qui donne x=1, valeur initialisée en deuxième ligne du programme.

Exercice 3 (edhec 2018)

1)• La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{a}e^{-\dfrac{x^2}{2a}}$ est positive sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions postives.
Il en résulte que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq 0$.

• f est continue sur $]-\infty,0[$ (fonction nulle) et continue sur $[0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.
Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf eventuellement en 0.

• f est nulle sur $]-\infty,0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge et vaut 0.

De plus, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{a}e^{-\dfrac{t^2}{2a}}dt = \left[-e^{-\dfrac{t^2}{2a}}\right]_0^x = 1 - e^{-\dfrac{x^2}{2a}}.$$

Comme $a > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{2a} = -\infty$. De plus, $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} e^u = 0$.

Par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\dfrac{x^2}{2a}} = 0$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = 1$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 0 + 1 = 1$.

On conclut que f est une densité.

2)Par définition, on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

• premier cas : $x < 0$
f étant nulle sur $]-\infty,0[$, elle l'est aussi sur $]-\infty,x]$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge et vaut 0. Ainsi, $F_X(x) = 0$.

• deuxième cas : $x \geq 0$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)dt}_{=0} + \int_{0}^{x} f(t)dt$$
$$= 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} \quad \text{d'après le calcul fait dans la question 1).}$$

• On conclut que $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

3)a)Calculons la fonction de répartition F_Y de Y.

$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{X^2}{2a} \leq x\right) = P(X^2 \leq 2ax)$.

• premier cas : $x < 0$
L'événement $(X^2 \leq 2ax)$ est impossible car X^2 prend des valeurs positives, alors que $2ax < 0$. Donc $F_Y(x) = 0$.

• deuxième cas : $x \geq 0$
On peut poursuivre le calcul fait plus haut et utiliser la racine carrée, fonction croissante :
$F_Y(x) = P\left(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{2ax}\right) = P\left(|X| \leq \sqrt{2ax}\right) = P\left(-\sqrt{2ax} \leq X \leq \sqrt{2ax}\right)$
$= F_X\left(\sqrt{2ax}\right) - F_X\left(-\sqrt{2ax}\right)$.
L'expression de F_x trouvée dans la question 2) permet de finir le calcul :
D'une part, $F_X\left(\sqrt{2ax}\right) = 1 - e^{-\frac{\left(\sqrt{2ax}\right)^2}{2a}} = 1 - e^{-x}$.
D'autre part, $F_X\left(-\sqrt{2ax}\right) = 0$ car $-\sqrt{2ax} \leq 0$ et F_x nulle sur $]-\infty, 0]$.
D'où, en reportant : $F_Y(x) = 1 - e^{-x}$.

• On conclut que $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Donc Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b)Script python :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
a=int(input("entrer la valeur de a"))
Y=rd.exponential(1)
X=np.sqrt(2*a*Y)
print(X)
```

4)a)$\forall x \in \mathbf{R},\ g(-x) = (-x)^2 e^{-\frac{(-x)^2}{2a}} = x^2 e^{-\frac{x^2}{2a}} = g(x)$. Donc g est paire.

b)$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,a)$.
D'après le cours, Z admet une espérance et une variance données par : $E(Z)=0$ et $V(Z)=a$.

D'après la formule de Koenig, Z^2 admet une espérance.
De plus, $E(Z^2)=V(Z)+\big(E(Z)\big)^2=a+0^2=a$.

Enfin, une densité f_Z de Z est donnée par $\forall x\in\mathbf{R},\ f_Z(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{\sqrt{a}}\right)^2}$,

c'est-à-dire $f_Z(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\dfrac{x^2}{2a}}$.

Le théorème de transfert donne alors : $E\big(Z^2\big)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_Z(x)dx$.

D'où, $E\big(Z^2\big)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\dfrac{x^2}{2a}}dx$.

c)X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big|xf(x)\big|dx$ converge.

Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$ et $x\mapsto xf(x)$ est positive sur $[0,+\infty[$, cela se ramène à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)dx$.

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{a}e^{-\dfrac{x^2}{2a}}dx$ est une intégrale convergente car elle est de même nature que celle définissant l'espérance de Z^2.
Donc X admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\text{De plus, } E(X) &= \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{a}e^{-\dfrac{x^2}{2a}}dx\\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\dfrac{x^2}{2a}}dx\\
&= \frac{1}{a}\times\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\dfrac{x^2}{2a}}dx \quad \text{par parité de } g\\
&= \frac{1}{a}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2\pi a}\times E\big(Z^2\big) \quad \text{d'après 4)b)}\\
&= \frac{1}{a}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2\pi a}\times a \quad \text{d'après 4)b)}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi a}}{2}.
\end{aligned}$$

5)a)$Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Le cours donne : $E(Y) = \dfrac{1}{1} = 1$.

$X^2 = 2aY$ est une fonction affine de Y donc X^2 admet une espérance donnée par :

$E(X^2) = 2aE(Y) = 2a$.

b)D'après la formule de Koenig, X admet une variance donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 2a - \left(\frac{\sqrt{2\pi a}}{2}\right)^2 = 2a - \frac{2\pi a}{4} = \frac{(4-\pi)a}{2}.$$

6)a)S_n est une fonction de X_1, ..., X_n où $(X_1, ..., X_n)$ est un échantillon de X. De plus, cette fonction ne dépend pas de a. Donc S_n est un estimateur de a.

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= E\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} E\big(X_k^2\big) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} E\big(X^2\big) \quad \text{car les } X_k \text{ ont même loi que } X \\
&= \frac{1}{2n} \times nE\big(X^2\big) \\
&= a \quad \text{car } E\big(X^2\big) = 2a.
\end{aligned}$$

b)X^2 admet une variance si et seulement si X^4 admet une espérance.
Or, $X^4 = (2aY)^2 = 4a^2Y^2$.
Comme Y suit une loi exponentielle, Y^2 admet une espérance, puis X^4 également.
Ainsi, X^2 admet une variance.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
V(X^2) &= E(X^4) - \big(E(X^2)\big)^2 \quad \text{d'après Koenig} \quad = E\big(4a^2Y^2\big) - (2a)^2 \\
&= 4a^2E\big(Y^2\big) - 4a^2.
\end{aligned}$$

Enfin, la formule de Koenig donne :

$$E\big(Y^2\big) = V(Y) + \big(E(Y)\big)^2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2.$$

En reportant plus haut, on déduit : $V(X^2) = 4a^2 \times 2 - 4a^2 = 4a^2$.

$$\begin{aligned}
\text{c)}V(S_n) &= V\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2n}\right)^2 V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} V\big(X_k^2\big) \quad \text{par indépendance des } X_k^2 \\
&= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X^2) \quad \text{ car les } X_k \text{ ont même loi que } X \\
&= \frac{1}{4n^2} \times nV(X^2) \\
&= \frac{a^2}{n} \quad \text{grâce à la question 6)b).}
\end{aligned}$$

7)a)L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\big(|S_n - E(S_n)| \geq \epsilon\big) \leq \frac{V(S_n)}{\epsilon^2}.$$

En passant à l'événement contraire et en utilisant que $E(S_n) = a$, on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\big(|S_n - a| < \epsilon\big) \geq 1 - \frac{V(S_n)}{\epsilon^2} \quad (1)$$

D'une part, $V(S_n) = \dfrac{a^2}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ car $a \leq 1$.

On déduit $-\dfrac{V(S_n)}{\epsilon^2} \geq -\dfrac{1}{n\epsilon^2}$, puis $1 - \dfrac{V(S_n)}{\epsilon^2} \geq 1 - \dfrac{1}{n\epsilon^2} \quad (2)$

D'autre part, l'événement $\big(|S_n - a| \leq \epsilon\big)$ contient l'événement $\big(|S_n - a| < \epsilon\big)$.

Donc $P\big(|S_n - a| \leq \epsilon\big) \geq P\big(|S_n - a| < \epsilon\big) \quad (3)$

En recollant les inégalités (1), (2) et (3), on obtient :

$$\forall \epsilon > 0,\ P\big(|S_n - a| \leq \epsilon\big) \geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2}.$$

b)Il faut trouver n tel que $P\left(S_n - \dfrac{1}{10} \leq a \leq S_n + \dfrac{1}{10}\right) \geq \dfrac{95}{100}$.

Or, $S_n - \dfrac{1}{10} \leq a \leq S_n + \dfrac{1}{10} \iff -\dfrac{1}{10} \leq S_n - a \leq \dfrac{1}{10} \iff |S_n - a| \leq \dfrac{1}{10}$.

Il faut donc trouver n tel que $P\left(|S_n - a| \leq \dfrac{1}{10}\right) \geq \dfrac{95}{100}$.

Par ailleurs, la question 7)a) pour $\epsilon = \dfrac{1}{10}$ donne :

$P\big(|S_n - a| \leq \frac{1}{10}\big) \geq 1 - \frac{100}{n}$.

En prenant n tel que $1 - \frac{100}{n} \geq \frac{95}{100}$, on répond au problème.

Or, $1 - \frac{100}{n} \geq \frac{95}{100} \Longleftrightarrow \frac{100}{n} \leq \frac{5}{100} \Longleftrightarrow \frac{n}{100} \geq \frac{100}{5} \Longleftrightarrow n \geq 2000$.

Problème (edhec 2018)

Partie I

1)a)$\forall t \in \mathbf{R},\ 1+t^2 \geq 1$ donc $\ln(1+t^2) \geq 0$.

Distinguons 2 cas :

• $x \geq 0$

La fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est positive donc en intégrant selon les bornes croissantes 0 et x, on a :

$\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt \geq 0$, soit $f(x) \geq 0$.

• $x \leq 0$

La fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est positive donc en intégrant selon les bornes croissantes x et 0, on a :

$\displaystyle\int_x^0 \ln(1+t^2)dt \geq 0$. Or, $f(x) = -\displaystyle\int_x^0 \ln(1+t^2)dt$ donc $f(x) \leq 0$.

b)La fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions continues.

D'après le cours, f est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

f est donc dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2).$$

Enfin, f' est continue sur $\mathbf{R}$. Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

c)$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbf{R}$.

2)a)Il faut établir que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = -f(x)$.

Dans l'intégrale définissant $f(-x)$, en faisant le changement de variable $u = -t$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt \\ &= \int_0^{x} \ln\big(1+(-u)^2\big) \times (-1)du \\ &= -\int_0^{x} \ln\big(1+u^2\big)du \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire.

> Remarque
> $u = -t \iff t = -u$. La fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe C^1 sur $[0, x]$, ce qui valide la formule de changement de variable.

b)f' est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

f'' est négative sur $]-\infty,0]$, puis positive sur $[0,+\infty[$.

f est donc concave sur $]-\infty,0]$, puis convexe sur $[0,+\infty[$.

$\mathscr{C}_f$ possède donc un point d'inflexion au point I d'abscisse 0.

L'ordonnée de I est : $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln(1+t^2)dt = 0$. Donc $I(0,0)$.

3)a)$\forall t \in \mathbf{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2}$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{a(1+t^2)+b}{1+t^2}$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ t^2 = (a+b)+at^2$

$\iff \begin{cases} a+b &= 0 \\ a &= 1 \end{cases}$ par identification

$\iff a = 1$ et $b = -1$

Remarque

On pouvait aussi utiliser l'astuce bien connue :

$\dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{(t^2+1)-1}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$.

b)Soit x un réel.

Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$ en posant :

$u(t) = \ln(1+t^2) \qquad v'(t) = 1$

$u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad v(t) = t$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,x]$. L'IPP est valide et donne :

$$\int_0^x \ln(1+t^2)dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} \times t\ dt$$

c'est-à-dire $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \qquad (*)$

Par ailleurs, la question 3)a) donne :

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int_0^x 1dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

En reportant dans $(*)$, on déduit :

$f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$

4)a)La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

$\dfrac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ de paramètre $2 > 1$)

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ converge également car $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, 1]$ (ce n'est pas une intégrale impropre).

D'après la propriété de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge.

> Remarque
> On peut prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

b)En développant 3)b) et en factorisant le membre de droite par $x\ln(1+x^2)$, on obtient pour tout $x > 0$:

$f(x) = x\ln(1+x^2)\left(1 - \dfrac{2}{\ln(1+x^2)} + \dfrac{2}{x\ln(1+x^2)}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right).$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\ln(1+x^2)} = 0.$

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+x^2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x\ln(1+x^2)} = 0.$

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt =$ constante.

Par somme et produit, on déduit que la grande parenthèse tend vers 1 quand $x \to +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

c)• Pour tout $x > 0$, on a :

$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right) = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right).$

• On déduit : $\dfrac{\ln(1+x^2)}{2\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1} \ln t = 0$.

Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty$, par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2\ln x} = 1$, ce qui prouve que $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln x$.

Par ailleurs, $x \underset{+\infty}{\sim} x$. Par produit d'équivalents, $x\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$.

La question 4)b) donne par transitivité : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$.

d)f étant impaire, on sait que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -f(-x)$. L'équivalent précédent se réécrit :

$-f(-x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$, soit $f(-x) \underset{+\infty}{\sim} -2x\ln x$.

Posons enfin $t = -x$. Quand $x \to +\infty$, $t \to -\infty$.

L'équivalent devient : $f(t) \underset{-\infty}{\sim} 2t\ln(-t)$.

En renommant t en x, on conclut : $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2x\ln(-x)$.

5)a)On a vu que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2)$. f' est alors de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme comme composée de fonctions de classe C^2. Ainsi, f est de classe C^3 sur $\mathbf{R}$.

b)$f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln(1+t^2)dt = 0$ et $f'(0) = \ln 1 = 0$.

De plus, $\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, ce qui donne $f''(0) = 0$.

Enfin, $\forall x \in \mathbf{R},\ f^{(3)}(x) = \dfrac{2(1+x^2)-(2x)\times(2x)}{(1+x^2)^2}$ donne $f^{(3)}(0) = 2$.

c)La formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 3 donne alors :

$f(x) = \dfrac{2}{3!}x^3 + o\left(x^3\right)$, soit $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

On déduit : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

6)a)Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}[0,1]$. Une densité de X est :

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $g : t \mapsto \ln(1+t^2)$.

On a alors : $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t) dt = E\left(g(X)\right)$
grâce au théorème de transfert.
b)programme

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
U=[1+rd.random()**2 for k in range(100000)]
V=np.log(U)
f=np.mean(V)
print(f)
```

> Remarque
> V est une liste formée de 100000 simulations de la variable aléatoire $g(X)$.
> f est la moyenne des valeurs de V, valeur très proche de l'espérance de $g(X)$, en vertu de la loi faible des grands nombres.
> Python trouve $f(1) \approx 0,26$.

Partie II

7)a)$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt = \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$, valeur de l'énoncé.
b)$u_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt = f(1)$.
8)a)Soit $n \in \mathbf{N}$.
Pour $0 \leq t \leq 1$, on a : $t^2 \leq 1$, puis $1 + t^2 \leq 2$.
D'où, $\ln(1+t^2) \leq \ln 2$, par croissance de ln.
Comme $\ln 2 \leq 1$, on a finalement $\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t^2) \leq 1$.
En multipliant membre à membre par $\left(\ln(1+t^2)\right)$, quantité positive, on a :
$\forall t \in [0,1],\ \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} \leq \left(\ln(1+t^2)\right)^n$.
En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on conclut :
$\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt \leq \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
b)Pour $0 \leq t \leq 1$, on a : $t^2 \geq 0$, puis $1 + t^2 \geq 1$ et $\ln(1+t^2) \geq 0$.
On déduit : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ \left(\ln(1+t^2)\right)^n \geq 0$.
Les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, par positivité, on déduit : $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \geq 0$, c'est-à-dire $u_n \geq 0$.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

9)a)Soit $n \in \mathbf{N}$.
On sait déjà que $u_n \geq 0$.
On a montré dans la question précédente que $\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t^2) \leq \ln 2$.
Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$, on déduit :

$$\forall t \in [0,1],\ \left(\ln(1+t^2)\right)^n \leq (\ln 2)^n .$$

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on conclut :

$$\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \leq \int_0^1 (\ln 2)^n \, dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 (\ln 2)^n \, dt = [(\ln 2)^n]_0^1 = (\ln 2)^n$. On déduit : $u_n \leq (\ln 2)^n$.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.
b)• $\ln 2 \approx 0,7$ donc $-1 < \ln 2 < 1$. Cela entraîne que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
• $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\ln 2)^n$ converge-série géométrique de paramètre $\ln 2 \in]-1,1[$.
D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs,
$\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

10)a)Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $\ln(1+t^2) \leq \ln 2$, puis $-\ln(1+t^2) \geq -\ln 2$ et $1-\ln(1+t^2) \geq 1-\ln 2 > 0$.
Par inverse, $0 \leq \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leq \dfrac{1}{1-\ln 2}$.
En multipliant membre à membre par $\left(\ln(1+t^2)\right)^n$, on a :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leq \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2}.$$

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on conclut :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2} dt.$$

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2} dt = \frac{1}{1-\ln 2}\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt = \frac{u_n}{1-\ln 2}$.
Ainsi, $\displaystyle 0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}$.
b)On a vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1-\ln 2} = 0$.
La question 10)a) donne avec gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0$.

c)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt.
\end{aligned}$$

> Remarque
> On a utilisé la formule bien connue :
> $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q = \ln(1+t^2) \neq 1$ et $n \to n-1$.

d)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-\ln(1+t^2)} - \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt
\end{aligned}$$

On a vu dans 10)b) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0.$

En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

c'est-à-dire, compte tenu de 10)c) :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt.$

e)On reprend l'idée du script 6)b), mais en prenant $g : t \mapsto \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)}$

qu'on construit par composée de $t \mapsto 1+t^2$, suivie de $h : t \mapsto \dfrac{1}{1-\ln t}$.

Le programme ci-dessous renvoie alors une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt$,

c'est-à-dire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def h(x):
    return 1/(1-np.log(x))
U=[1+rd.random()**2 for k in range(100000)]
V=h(U)
f=np.mean(V)
print(f)
```

Python renvoie $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \approx 1,52$.