Essec II 2016

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne.

On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée.

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés des variables aléatoires discrètes.

Dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné.

Dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.

Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathrm{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathrm{V}(X)$ sa variance.

Les deuxième et troisième parties sont indépendantes, et peuvent en outre être traitées en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathrm{P}(X = j) = \mathrm{P}(X > j - 1) - \mathrm{P}(X > j).$$

   (b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathrm{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{P}(X > j) - p\,\mathrm{P}(X > p).$$

2. (a) On suppose que X admet une espérance $\mathrm{E}(X) = \mu$.

      i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathrm{P}(X = k)$.

      ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathrm{P}(X = k) = 0.$$

      iii. En déduire que

$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathrm{P}(X > p) = 0.$$

      iv. Montrer que la série de terme général $\mathrm{P}(X > j)$ converge.

      v. Montrer que

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > j).$$

   (b) On suppose que la série de terme général $P(X > j)$ converge.

      i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{P}(X > j).$$

      ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathrm{P}(X = j)$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > j)$.

      iii. En déduire que X admet une espérance.

(c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathrm{P}(X > j)$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait
$$\mathrm{P}(X > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}. \qquad (*)$$

(a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

(c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul
$$\mathrm{P}(X = j) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right).$$

(d) i. Etudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul,
$$\mathrm{P}(X = j) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.$$

(e) Montrer, en utilisant le résultat de (c), que
$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\,\mathrm{P}(X = j) = \alpha.$$

(f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Deuxième partie : Etude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ **mutuellement indépendantes** et de **même loi** à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.

Soit k un entier naturel non nul. On note : $T_k = X_1 + ... + X_k$.

T_k représente donc le jour où le k-ième composant tombe en panne.

On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement :

$A_n =$ " le composant en place le jour n tombe en panne " $=$ " il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k = n$ ".

Ainsi, $A_n = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} (T_k = n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathrm{P}(X_1 = j)$ et $u_j = \mathrm{P}(A_j)$.
   On suppose que $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ p_j \neq 0$. On pose par convention $\mathbf{u_0 = 1}$.
   (a) Montrer que $u_1 = p_1$.
   (b) i. Montrer que $A_2 = [X_1 = 2] \bigcup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.
   ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.
   (c) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$
   i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.
   ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que
   $$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j\geqslant 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k].$$
   iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n,
   $$\mathrm{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathrm{P}(A_{n-k}).$$
   (d) Montrer que
   $$u_n = u_{n-1}p_1 + ... + u_0 p_n.$$
   (e) Informatique.
   Ecrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n,P):` prenant en paramètres un entier naturel n et une liste P où $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$, et renvoyant la valeur de u_n.
   Indication : on pourra construire de proche en proche une liste $U = [u_0, u_1, ..., u_n]$.
   On rappelle que dans une liste, les éléments sont numérotés à partir de 0.

5. Soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$. **Dans cette question**, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ. Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathrm{P}(X_1 = j) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.
   (a) Calculer $\mathrm{P}(X_1 > k)$ pour tout entier naturel k non nul.
   (b) Calculer $\mathrm{P}_{[X_1>k]}(X_1 = k + 1)$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,
   $$\mathrm{P}(A_n) = \lambda.$$

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$. Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.
   (a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3.
   (b) Soit la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,
   $$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$
   (c) i. Diagonaliser la matrice M.
   ii. Montrer que
   $$M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.
   ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Troisième partie : Etude de la durée de fonctionnement.

Comme dans la partie précédente, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ **indépendantes** et de **même loi**, telle que pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On étudie dans cette partie la durée de fonctionnement prévisible du système si on a k composants à disposition (y compris celui installé au départ).
On notera toujours $T_k = X_1 + ... + X_k$.
On suppose dans cette partie qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathrm{P}(X_1 > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}.$$

En particulier, dans toute cette partie, X_1 admet une espérance, on l'on notera $\mu = \mathrm{E}(X_1)$.

7. Que vaut $\mathrm{E}(T_k)$?
8. On suppose **dans cette question** que $\alpha > 2$. Alors, X_1 admet une variance σ^2.
   (a) Calculer $\mathrm{V}(T_k)$.
   (b) Montrer que pour tout réel ε strictement positif,
   $$\mathrm{P}\left(|T_k - k\mu| \geqslant k\varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}.$$
   (c) Déduire que, pour tout réel strictement positif ε, on a
   $$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon[\right) = 1.$$
9. On suppose maintenant uniquement que $\alpha > 1$ et donc que X_1 n'a pas nécessairement de variance d'où l'impossibilité d'appliquer la méthode précédente. On va mettre en œuvre ce qu'on appelle une *méthode de troncation*.
   On fixe un entier naturel m strictement positif. Pour tout entier naturel non nul i, on définit deux variables aléatoires $Y_i^{(m)}$ et $Z_i^{(m)}$ de la façon suivante
   $$Y_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \leqslant m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad Z_i^{(m)} = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.
   (b) i. En utilisant la question 3(d)ii, montrer que
   $$\mathrm{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha}.$$
   ii. Montrer que
   $$\mathrm{E}(Z_1^{(m)}) \leqslant \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx.$$
   iii. Calculer
   $$\int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx.$$
   iv. En déduire que
   $$\lim_{m\to+\infty} \mathrm{E}(Z_1^{(m)}) = 0.$$
   v. Montrer que
   $$\lim_{m\to+\infty} \mathrm{E}(Y_1^{(m)}) = \mu.$$
   (c) i. Montrer que
   $$(Y_1^{(m)})^2 \leqslant mX_1.$$
   ii. En déduire que
   $$\mathrm{V}(Y_1^{(m)}) \leqslant m\mu.$$

(d) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel m_0 non nul tel que pour tout entier naturel m supérieur ou égal à m_0,

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leqslant \varepsilon.$$

Jusqu'à la fin du problème, m désignera un entier supérieur ou égal à m_0.

(e) On note, pour tout entier naturel k non nul

$$U_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)} \text{ et } V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{k} Z_i^{(m)}.$$

Vérifier que

$$T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}.$$

(f) i. Montrer que

$$\mathrm{E}(V_k^{(m)}) \leqslant k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

ii. En déduire que

$$\mathrm{P}(V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}.$$

(g) i. Montrer que

$$\mathrm{E}(U_k^{(m)}) \geqslant k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}.$$

ii. En déduire que

$$\left|\mathrm{E}(U_k^{(m)}) - k\mu\right| \leqslant k\varepsilon.$$

iii. Montrer que

$$\mathrm{P}\left(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right) \leqslant \mathrm{P}\left(|U_k^{(m)} - \mathrm{E}(U_k^{(m)})| \geqslant k\varepsilon\right).$$

iv. Montrer que

$$\mathrm{V}(U_k^{(m)}) \leqslant km\mu.$$

v. En déduire que

$$\mathrm{P}\left(|U_k^{(m)} - k\mu| \geqslant 2k\varepsilon\right) \leqslant \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

(h) i. Montrer que pour tout couple d'événements A et B dans $\mathcal{A}$, on a

$$\mathrm{P}(A \cap B) \geqslant \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1.$$

ii. En appliquant l'inégalité précédente aux événements

$$A = \left[V_k^{(m)} < k\varepsilon\right] \text{ et } B = \left[U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)[\right],$$

montrer que

$$\mathrm{P}\left(T_k \in]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)[\right) \geqslant \mathrm{P}\left(V_k^{(m)} < k\varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu-2\varepsilon), k(\mu+2\varepsilon)[\right) - 1.$$

iii. Déduire des questions précédentes que pour tout réel ε strictement positif, et pour tout entier m supérieur ou égal à m_0, on a pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathrm{P}\left(T_k \in]k(\mu-3\varepsilon), k(\mu+3\varepsilon)[\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

iv. Pour k assez grand, appliquer l'inégalité précédente à un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$ et conclure :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu-3\varepsilon, \mu+3\varepsilon[\right) = 1.$$