Chapitre 5 : compléments sur les fonctions

Dans le chapitre, les fonctions sont définies sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbf{R}}$.

I)Fonctions équivalentes

Déf : on dit que f et g sont équivalentes en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ou si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

On note alors : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.

> Remarque
> f et g sont équivalentes en a s'il existe une fonction $\alpha : V \to \mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$ et $\forall x \in V,\ f(x) = \alpha(x) g(x)$.

Propriété 1
Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

> Remarque
> La réciproque est fausse : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ en 0.

Propriété 2
Soit l un réel non-nul. Alors, $f(x) \underset{a}{\sim} l \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Propriété 3
1)Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré.
2)Tout polynôme est équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré.

Propriété 4 (opérations sur les équivalents)
Soient f, g, h, i quatre fonctions définies au voisinage de a et α un réel.
1)Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \underset{a}{\sim} i(x)$, alors on a :

$$f(x)h(x) \underset{a}{\sim} g(x)i(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x)}{h(x)} \underset{a}{\sim} \frac{g(x)}{i(x)}.$$

2)Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors on a : $(f(x))^\alpha \underset{a}{\sim} (g(x))^\alpha$.

> Remarque
> Interdit de faire une somme, une différence d'équivalents ou d'appliquer une fonction sur un équivalent (sauf la fonction puissance).

<u>Exercice 1</u>
Soit $f(x) = x^2 - x$. Trouver un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$, $-\infty$, 0 et 1.

<u>Exercice 2</u>
Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 + x}}{x^2 + x}$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$, 1 et 0.

Propriété 5
Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de a.

Théorème 1
1)$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.
2)$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.
3)Pour tout réel $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

Exercice 3
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$.

Exercice 4
Déterminer un équivalent simple de $\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 5
Déterminer un équivalent simple de $e^{1/x}-1$ en $-\infty$.

II)Fonction négligeable devant une autre

Déf : on dit f est négligeable devant g en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note alors $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

> Remarque
> f est négligeable devant g en a s'il existe une fonction $\epsilon : V \to \mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V,\ f(x) = \epsilon(x)g(x)$.

Propriété 6
$f(x) \underset{a}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Théorème 2 (croissances comparées)
Quels que soit les réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ on a :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^{\gamma x} = 0$.

Exercice 6
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Exercice 7
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Propriété 7
Soient r et s des réels strictements positifs.

1)Si $r < s$, alors $x^r \underset{\pm\infty}{=} o(x^s)$.

2)Si $r > s$, alors $x^r \underset{0}{=} o(x^s)$.

Propriété 8
Si $g(x) \underset{a}{=} o\big(f(x)\big)$, alors $f(x) + g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.

III)Développement limité d'une fonction en 0

Déf : soit f une fonction définie sur un voisinage V de 0.
On dit que f admet un DL d'ordre 1 en 0 s'il existe des réels α et β tels que

$$\forall x \in V,\ f(x) \underset{0}{=} \alpha + \beta x + o(x).$$

On dit que f admet un DL d'ordre 2 en 0 s'il existe des réels α, β et γ tels que

$$\forall x \in V,\ f(x) \underset{0}{=} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o(x^2).$$

> Remarques
> 1)Le polynôme du DL s'écrit selon les puissances croissantes.
> 2)On peut écrire $o(x) = x\epsilon(x)$ et $o(x^2) = x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Propriété 9
Si f admet un DL d'ordre 2 en 0, alors f admet un DL d'ordre 1 en 0.

Propriété 10 (DL $\longrightarrow$ équivalent)
Soit f une fonction telle que $\forall x \in V,\ f(x) \underset{0}{=} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o(x^2)$.

$$\text{Alors, } f(x) \underset{0}{\sim} \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad \alpha \neq 0, \\ \beta x & \text{si} \quad \alpha = 0 \text{ et } \beta \neq 0, \\ \gamma x^2 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 0 \text{ et } \gamma \neq 0 \end{cases}$$

Théorème 3(formule de Taylor Young d'ordre 1 ou 2)
Soit f une fonction définie sur un voisinage V de 0.
1)Si f est dérivable en 0, alors f admet un DL d'ordre 1 en 0 donné par :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$

2)Si f est de classe C^2 sur V, alors f admet un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Théorème 4(DL usuels d'ordre 2)
1)$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
2)$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
3)Pour tout α réel, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.
En particulier : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.

> Remarque
> Avec ce théorème, on peut retrouver les équivalents du théorème 1.

<u>Exercice 8</u>
Montrer que $f : x \mapsto \ln(3 + x + x^2)$ admet un DL d'ordre 2 en 0 et le déterminer.

IV)Développement limité d'une fonction en a

Déf : soit f une fonction définie sur un voisinage V de a.
On dit que f admet un DL d'ordre 1 en a s'il existe des réels α et β tels que

$$\forall x \in V,\ f(x) \underset{a}{=} \alpha + \beta(x-a) + o(x-a).$$

On dit que f admet un DL d'ordre 2 en a s'il existe des réels α, β et γ tels que

$$\forall x \in V,\ f(x) \underset{a}{=} \alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big).$$

> Remarque
> Le polynôme du DL s'écrit selon les puissances croissantes. Il ne faut pas le développer.

Propriété 11
Si f admet un DL d'ordre 2 en a, alors f admet un DL d'ordre 1 en a.

Propriété 12 (DL $\longrightarrow$ équivalent)
Soit f une fonction telle que $\forall x \in V,\ f(x) \underset{a}{=} \alpha+\beta(x-a)+\gamma(x-a)^2+o\big((x-a)^2\big)$.

$$\text{Alors, } f(x) \underset{a}{\sim} \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad \alpha \neq 0, \\ \beta(x-a) & \text{si} \quad \alpha = 0 \text{ et } \beta \neq 0, \\ \gamma(x-a)^2 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 0 \text{ et } \gamma \neq 0 \end{cases}$$

Théorème 5(formule de Taylor Young d'ordre 1 ou 2)
Soit f une fonction définie sur un voisinage V de a.
1)Si f est dérivable en a, alors f admet un DL d'ordre 1 en a donné par :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

2)Si f est de classe C^2 sur V, alors f admet un DL d'ordre 2 en a donné par

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big).$$

<u>Exercice 9</u>

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ admet un DL d'ordre 2 en 1 et le déterminer.

Réponse : $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$.

Ce qui donne : $f(x) = e + \dfrac{e}{2}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$.

V)Applications des développements limités

V.1)Levée de forme indéterminée

Exercice 10
Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in\,]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

V.2)Tangente

Exercice 11
1)Déterminer le DL d'ordre 2 en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{2+e^x}$.

2)Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, puis étudier la position relative de (C_f) et (T) au voisinage de ce point.

1)Réponse : $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(2+e^x)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x-2)}{(2+e^x)^3}$.
Donc $f(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{54}x^2 + o(x^2)$.

V.3)Asymptote oblique

Exercice 12
Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1)Écrire le DL d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+X)$.
2)En déduire qu'il existe des réels m et p ainsi qu'une fonction $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ avec $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ tels que

$$\forall x > 0,\ f(x) = mx + p + \varphi(x).$$

Interpréter ce résultat.