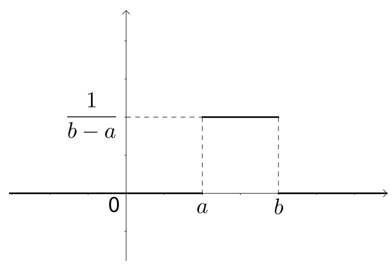
Chapitre 17 : Lois à densité usuelles

I)Loi uniforme sur un intervalle

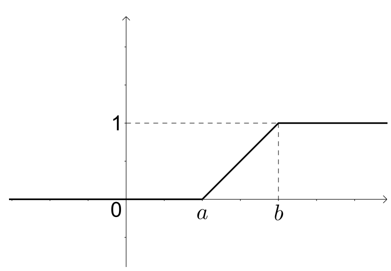
Déf : soient a et b, deux réels tels que $a < b$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$ si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Théorème 1
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$.La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$



Propriété 1
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$.
1)$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$,
2)$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Justifier que X est à densité, préciser une densité f de X, ainsi que son espérance.

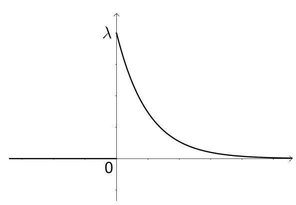
Exercice 2
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0,2]\big)$ et soit $Y = 1 - 2X$.
1)Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2)En déduire la fonction de répartition F_Y de Y.
3)Reconnaître la loi de Y et préciser son espérance.

Propriété 2 (transformation affine)
Si X suit une loi uniforme, alors toute fonction affine de X suit une loi uniforme.
En particulier, si $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big)$, alors $aX + bX \hookrightarrow \mathscr{U}\big([b, a+b]\big)$.

II)Loi exponentielle

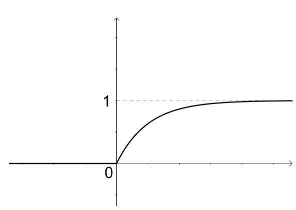
Déf : soit λ un réel strictement positif. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ si X a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Théorème 2
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0. \end{cases}$$



Propriété 3
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

1)$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$,

2)$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Propriété 4
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

$\forall t \geq 0, \forall s \geq 0,\ P_{(X>s)}(X > s+t) = P(X > t)$.

> ✓ On dit que X est ≪ sans mémoire ≫. Seules les variables aléatoires suivant une loi exponentielle vérifient cette égalité.

Propriété 5
Soit $\lambda > 0$ un réel quelconque.

Si $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, alors $\dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

<u>Exercice 3</u>
Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Déterminer la fonction de répartition et l'espérance de X.

<u>Exercice 4</u>
Soient $\lambda > 0$ un réel et X une variable aléatoire de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}e^{\lambda x} & si\ x < 0 \\ \\ \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

1)Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

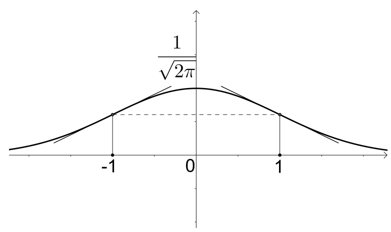
2)En déduire la fonction de répartition F_Y de $Y = |X|$.

3)Reconnaître la loi de Y et préciser son espérance.

III)Loi normale centrée réduite

Déf : on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite et on note $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ si X a pour densité :

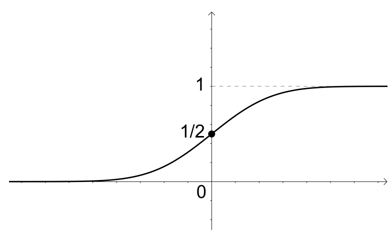
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$



✓ La courbe possède des points d'inflexion d'abscisses -1 et 1.

Déf : soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. La fonction de répartition de X notée Φ, est définie par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t.$$



✓ On calcule $\Phi(x)$ à l'aide d'une table.

Exercice 5
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Calculer $P(0 \leq X \leq 1,65)$.

Exercice 6
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Encadrer l'unique réel a tel que $P(1 \leq X \leq a) = 0,1$.

Propriété 6
1)$\forall x \in \mathbf{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$,

2)$\Phi(0) = \frac{1}{2}$,

3)Φ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$ et C^1 sur $\mathbf{R}$.

Propriété 7
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

1)$E(X) = 0$,

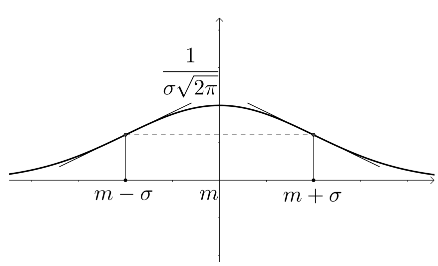
2)$V(X) = 1$.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7793	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8943	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

IV)Loi normale

Déf : soient m un réel et σ un réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si X a pour densité la fonction f définie par :

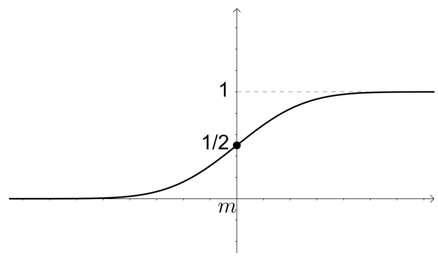
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$



✓ La courbe possède des points d'inflexion d'abscisses $m-\sigma$ et $m+\sigma$.

Déf : soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$. La fonction de répartition de X est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t.$$



Propriété 8
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$.

1)$E(X) = m$,

2)$V(X) = \sigma^2$.

Propriété 9 (transformation affine)
Si $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$, alors $aX + b \hookrightarrow \mathscr{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

Théorème 3 (important en pratique)

$X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathscr{N}(0, 1)$.

Exercice 7
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 6$ et $\sigma = 4$.
Calculer une valeur approchée de $P(X < 7)$, $P(X > 3)$ et $P(3 < X < 7)$.

Exercice 8
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$.
On donne $P(X \leq 0) = 0,1$ et $P(X \geq 3) = 0,2$. Déterminer une valeur approchée de m et σ.

Théorème 4 (stabilité de la loi normale pour l'addition)
Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement **indépendantes** telles que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Alors $X_1 + ... + X_n \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i$ et $\sigma^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.