total = 110 points   66 points = $\frac{20}{20}$ = 60% du sujet

DS3 ECG2 appliquées

EXERCICE 1

32 points

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E, où $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \qquad b(P) = P - P', \qquad c(P) = 2XP - (X^2-1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

10 points

1. Montrer que a est un endomorphisme de E. 2
2. (a) Montrer que la matrice de A de a dans la base $\mathcal{B}$ de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 2

   (b) Déterminer le rang de la matrice A. 1
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? 1
   Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(a)$ et une base de $\mathrm{Im}(a)$. 2 + 2

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

7 points

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $\quad b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$. 3
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. 2

   (b) L'endmorphisme b est-il diagonalisale ? 2

Partie III : Étude de c

11 points

6. Montrer : $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 2
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ? 1
8. (a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre 3, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$. 4,5 + 1 + 1

   (b) En déduire que l'endormophisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c. 1,5

Partie IV : Étude de f

4 points

9. Montrer que $\quad \forall P \in E, \quad f(P) = P'$. 2,5
10. En déduire : $\quad (BA - AB)^3 = 0$. 1,5

Exercice 2 46 points

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f 6 points

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$. 1 + 0,5 + 1
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$. 2
3. Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$. 1,5

Partie II : Étude d'une suite 17 points

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$. 2
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite. 2 + 0,5 + 2
6. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$. 2

   b. En déduire : $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. 2,5
7. **a.** Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(n)` prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}$ et renvoyant la valeur de u_n. 4

   b. A l'aide de la fonction `suite`, compléter la fonction Python suivante prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif et renvoyant une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=1
    while ................ :
        n=n+1
    return(..........)
```

2

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale 13 points

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a : 1 + 3

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$. 2
10. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$. 2
11. **a.** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$. 1

    b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$. 2
    On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.

    Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ et sa tangente au point d'abscisse 0.
    2

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

10 points

On considère la fonction H de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

13. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U. 1

b. Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question **2**. 2

14. **a.** Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$. 1,5

b. Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= a - 1. \end{cases}$$

2

c. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$? 1,5

15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$? 2

Exercice 3 32 points

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales : 0,5

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

2. Calculer I_0 et I_1 1 + 2
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$ 2,5

   (b) En déduire I_2 1

   (c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input('entrer n'))
a=1/2
b=np.log(2)-1/2
for k in range(2,n+1):
    aux=a
    a=...........
    b=..........
print(b)
```

2

4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. 2

   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite. 0,5
5. A l'aide d'une intégration par parties, établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$. 2
6. (a) Calculer J_0. Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n. 1 + 2

   (b) En déduire la valeur de J_1. 1
7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input('entrer n'))
J=.........
for k in range(1,n):
    J=1/k-J
I=.........
print(I)
```

2

8. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$. 3
9. (a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$. 1,5

   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. 2

   (c) A l'aide de la question 5), déterminer un équivalent de J_n du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$. 2
10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n. 1,5

    (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n? 1,5 + 1