EDHEC 2018

Exercice 1

Les questions 5)6)7)8) ont été modifiées par rapport au sujet de concours initial.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

On considère l'application f qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et I_4 la matrice unité d'ordre 4.

1) Vérifier que A n'est pas inversible.
2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4) a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2.
   b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
   c) Calculer les matrices $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$, $f(E_4)$, puis écrire chacune comme combinaison linéaire de E_1,E_2,E_3, E_4. Donner alors une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5) a) Ecrire la matrice B.
   b) Déterminer soigneusement le rang de B et de $B - 7I_4$.
   c) En déduire les valeurs propres de B. Justifier que B est diagonalisable.

   Dans la suite de l'exercice, on généralise. A est une matrice **quelconque** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que A et B possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

6) Montrer que λ est valeur propre de $B \iff \exists M \neq 0 \mid f(M) = \lambda M$.

   On pourra utiliser l'application identique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on notera Id.
7) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On pose $V = X\,{}^tX$.
   a) Justifier que V appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $f(V) = \lambda V$.
   c) A l'aide de la question 6), conclure que λ est valeur propre de B .
8) Soit λ une valeur propre de B. D'après la question 6), il existe alors une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = \lambda M$.

   En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 2

On dispose de trois pièces :

− une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\dfrac{1}{2}$

− une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr,

− une pièce numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout $k \in \mathbb{N}*$, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. Déduire que X possède une variance et que $V(X) = \dfrac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.
6. Loi de $X + Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \dfrac{2}{3}$.
   (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n-1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n-1])$$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
   $$P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
7. Informatique. On suppose importé le module `numpy.random` d'alias `rd`.
   On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie de façon équiprobable un entier aléatoire compris entre a et $b-1$.
   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .
   (a) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=rd.randint(...,...)
x=1
if piece==0:
    lancer=rd.randint(...,...)
    while lancer==0:
        lancer=......
        x=.....
if piece==1:
    x=.....
print(x)
```

   (b) Justifier que le cas de la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}\, e^{-\dfrac{x^2}{2a}} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3) On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.
   a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   b) On rappelle qu'en `Python`, la commande `rd.exponential(lambda)` du module `numpy.random` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Ecrire un script `Python` demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4) a) Vérifier que la fonction g, qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.
   b) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et a. Justifier que Z^2 admet une espérance. Donner son expression sous forme d'une intégrale de $E\left(Z^2\right)$ ainsi que sa valeur.
   c) En déduire que X admet une espérance et la déterminer.

5) a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.
   b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer

6) Question modifiée par rapport au sujet original.
   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.
   On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$
   a) Justifier que S_n est un estimateur a et montrer que $E(S_n) = a$.
   b) Montrer que X^2 possède une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.
   c) En déduire $V(S_n)$.

7) On suppose que a est inférieur ou égal à 1.
   a) Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0, P((|S_n - a| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

   b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \dfrac{1}{10}; S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance au moins égal à 95%.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe :

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt.$$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : étude de f

1) a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
   b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2) a) Montrer que f est impaire.
   b) Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

   b) Grâce à une intégration par parties, en déduire que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.
   b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.
   c) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   Etablir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$$

   d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
   a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
   On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour f, c'est à dire :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

   b) Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
   c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

6) a) Question rajoutée par rapport au sujet original. En utilisant la loi uniforme à densité sur $[0,1]$, interpréter $f(1)$ comme l'espérance d'une variable aléatoire.

b) Informatique.

On suppose importés le modules `numpy` d'alias `np` et le module `numpy.random` d'alias `rd`.

On rappelle qu'en `Python`, la fonction `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1]$.

Compléter le script `Python` suivant pour qu'il calcule et affiche une valeur approchée de $f(1)$:

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
U=[................. for k in range(100000)]
V=np.log(U)
f=............
print(f)
```

Partie II : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

7) a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9) a) Etablir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10) a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}.$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

e) Modifier le script présenté à la question 6)b) pour donner une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.