Corrigé révisions - séance 5

<u>Exercice</u> (extrait essec II 2009)

Partie I

1)• f_θ est définie sur $\mathbf{R}$

• $\forall x \in [0,\theta],\ f_\theta(x) \geq 0$ car $x \geq 0$ et $\theta > 0$.

$\forall x \notin [0,\theta],\ f_\theta(x) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ f_\theta(x) \geq 0$.

• f_θ est continue sur $[0,\theta]$ (polynôme) et sur $\mathbf{R} \setminus [0,\theta]$ (fonction nulle).

Donc f_θ est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0 et θ.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_\theta(x)dx$ converge et vaut 0 car f_θ est nulle sur $]-\infty,0[$.

De même pour $\displaystyle\int_{\theta}^{+\infty} f_\theta(x)dx$.

Enfin, $\displaystyle\int_{0}^{\theta} f_\theta(x)dx$ converge car f_θ est continue sur $[0,\theta]$; l'intégrale n'est donc pas impropre.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)dx$ converge.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} f_\theta(x)dx + \int_{0}^{\theta} f_\theta(x)dx + \int_{\theta}^{+\infty} f_\theta(x)dx \\ &= 0 + \int_0^\theta \frac{k+1}{\theta^{k+1}}x^k dx + 0 \\ &= \left[\frac{x^{k+1}}{\theta^{k+1}}\right]_0^\theta \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc f_θ est une densité de probabilité.

2)X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_\theta(x)|dx$ converge.

Comme $x \mapsto |xf_\theta(x)|$ est nulle sur $\mathbf{R} \setminus [0,\theta]$ et positive sur $[0,\theta]$, on est ramené à montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^\theta xf_\theta(x)dx$.

Celle-ci est acquise puisque $x \mapsto xf_\theta(x)$ est continue sur $[0,\theta]$.

Donc X admet une espérance donnée par :

$$E(X) = \int_0^\theta xf_\theta(x)dx = \int_0^\theta \frac{k+1}{\theta^{k+1}}x^{k+1}dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\left[\frac{x^{k+2}}{k+2}\right]_0^\theta = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \times \frac{\theta^{k+2}}{k+2}.$$

D'où $E(X) = \dfrac{(k+1)\theta}{k+2}$.

3)Posons $\lambda_0 = \dfrac{k+2}{k+1}$.

On a alors : $E(\lambda_0 X) = \lambda_0 E(X) = \dfrac{k+2}{k+1} \times \dfrac{(k+1)\theta}{k+2} = \theta$.

4)X^2 admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f_\theta(x)| dx$ converge.

Comme $x \mapsto |x^2 f_\theta(x)|$ est nulle sur $\mathbf{R} \setminus [0, \theta]$ et positive sur $[0, \theta]$, on est ramené à montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^\theta x^2 f_\theta(x) dx$.

Celle-ci est acquise puisque $x \mapsto x^2 f_\theta(x)$ est continue sur $[0, \theta]$.
Donc X^2 admet une espérance donnée par :

$$E(X^2) = \int_0^\theta x^2 f_\theta(x) dx = \int_0^\theta \frac{k+1}{\theta^{k+1}} x^{k+2} dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \left[\frac{x^{k+3}}{k+3}\right]_0^\theta = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \times \frac{\theta^{k+3}}{k+3}.$$

D'où $E(X^2) = \dfrac{(k+1)\theta^2}{k+3}$.

Donc X admet une variance donnée par la formule de Koënig :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{(k+1)\theta^2}{k+3} - \left(\frac{(k+1)\theta}{k+2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{k+1}{k+3} - \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}\right)\theta^2 \\ &= \frac{(k+1)\theta^2}{(k+3)(k+2)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5)R(T,\theta) &= E\left((T-\theta)^2\right) \\ &= E\left(T^2 - 2\theta T + \theta^2\right) \\ &= E(T^2) - 2\theta E(T) + E\left(\theta^2\right) \quad \text{par linéarité} \\ &= V(T) + E(T)^2 - 2\theta E(T) + \theta^2 \quad \text{par Koënig} \\ &= V(T) + (E(T) - \theta)^2. \end{aligned}$$

✓ Le nombre réel $E(T) - \theta$ s'appelle le biais de T.

6)De la formule ci-dessus, on déduit :

$$R(\lambda_0 X, \theta) = V(\lambda_0 X) + \underbrace{(E(\lambda_0 X) - \theta)^2}_{=0} = \lambda_0^2 V(X) = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 \times \frac{(k+1)\theta^2}{(k+3)(k+2)^2} \quad .$$

D'où $R(\lambda_0 X, \theta) = \dfrac{\theta^2}{(k+1)(k+3)}$.

7)$R(\lambda X,\theta) = E\left((\lambda X-\theta)^2\right)$

$$\begin{aligned}
&= E\left(\lambda^2 X^2 - 2\theta\lambda X + \theta^2\right)\\
&= \lambda^2 E(X^2) - 2\theta\lambda E(X) + E\left(\theta^2\right) \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{(k+1)\theta^2}{k+3}\lambda^2 - 2\frac{(k+1)\theta^2}{k+2}\lambda + \theta^2\\
&= \theta^2\left(\frac{k+1}{k+3}\lambda^2 - 2\frac{k+1}{k+2}\lambda + 1\right).
\end{aligned}$$

Donc $R(\lambda X,\theta) = \theta^2 Q(\lambda)$ avec $Q(\lambda) = \dfrac{k+1}{k+3}\lambda^2 - 2\dfrac{k+1}{k+2}\lambda + 1$.

8)Q est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme polynôme et $\forall\lambda\in\mathbf{R},\ Q'(\lambda) = 2\dfrac{k+1}{k+3}\lambda - 2\dfrac{k+1}{k+2}$.

$Q'(\lambda)\geq 0 \iff \lambda \geq \dfrac{k+3}{k+2}$, d'où le tableau de variations de Q :

λ	$-\infty$		λ^*		$+\infty$
$Q'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$Q(\lambda)$		$\searrow$		$\nearrow$	

avec $\lambda^* = \dfrac{k+3}{k+2}$.

9)D'après le tableau de variations, on a : $\forall\lambda\in\mathbf{R},\ Q(\lambda^*)\leq Q(\lambda)$.
En multipliant membre à membre par θ^2, on déduit :
$\forall\lambda\in\mathbf{R},\ R(\lambda^* X,\theta)\leq R(\lambda X,\theta)$.
On a donc en particulier pour $\lambda=\lambda_0$: $R(\lambda^* X,\theta)\leq R(\lambda_0 X,\theta)$, ce qui répond au but recherché.

✓ Construire un estimateur de θ avec un petit risque quadratique permet de réduire le risque qu'il prenne une valeur trop éloignée de θ, lors de l'expérience aléatoire provenant du n-échantillon.

Partie II

1)$\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(\theta)$ donc $X_i(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbf{N},\ P(X_i = k) = e^{-\theta}\dfrac{\theta^k}{k!}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ Y_i(\Omega) = \{0,1\}$ donc Y_i suit une loi de Bernoulli.

Son paramètre est $P(Y_i = 1) = P(X_i = 0) = e^{-\theta}$.

Ainsi, $\forall i \in [\![1,n]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(e^{-\theta}\right)$.

2)• Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire Y_i est construite à partir de X_i.
Comme X_1, ..., X_n sont indépendantes, alors Y_1, ..., Y_n le sont également.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, e^{-\theta}\right)$.

• On déduit : $E\left(\overline{Y_n}\right) = E\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \dfrac{1}{n}E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \dfrac{1}{n} \times ne^{-\theta} = e^{-\theta}$.

3)$V\left(\overline{Y_n}\right) = V\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \dfrac{1}{n^2} \times ne^{-\theta}\left(1 - e^{-\theta}\right) = \dfrac{e^{-\theta}\left(1 - e^{-\theta}\right)}{n}$.

4)Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, les variables aléatoires X_1, ..., X_k sont indépendantes.

D'après le cours, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \theta = k\theta$.

Ainsi, $\forall k \in [\![1,n]\!],\ S_k \hookrightarrow \mathscr{P}(k\theta)$.

5)Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(j) &= P_{(S_n = j)}(X_1 = 0)\\
&= \frac{P\big((X_1 = 0) \cap (S_n = j)\big)}{P(S_n = j)}\\
&= \frac{P\big((X_1 = 0) \cap (X_1 + X_2 + \cdots + X_n = j)\big)}{P(S_n = j)}\\
&= \frac{P\big((X_1 = 0) \cap (X_2 + \cdots + X_n = j)\big)}{P(S_n = j)}\\
&= \frac{P(X_1 = 0)P(X_2 + \cdots + X_n = j)}{P(S_n = j)} \quad (*)\\
&= \frac{e^{-\theta}e^{-(n-1)\theta}\dfrac{\big((n-1)\theta\big)^j}{j!}}{e^{-n\theta}\dfrac{(n\theta)^j}{j!}} \quad \text{car } X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{P}\big((n-1)\theta\big) \text{ et } S_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n\theta)\\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^j\\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j.
\end{aligned}$$

6)S_n est discrète infinie donc $\varphi(S_n)$ également.
D'après le théorème de transfert, $\varphi(S_n)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{j\geq 0}\left|\varphi(j)P(S_n = j)\right|$ est convergente.

Or, $\forall j \in \mathbf{N}$, $\left|\varphi(j)P(S_n = j)\right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^j}{j!} = \frac{\left((n-1)\theta\right)^j}{j!}e^{-n\theta}$.

La série $\sum_{j\geq 0}\frac{\left((n-1)\theta\right)^j}{j!}$ est convergente car c'est une série exponentielle.

La série $\sum_{j\geq 0}\left|\varphi(j)P(S_n = j)\right|$ qui est de même nature, converge donc également.

Donc $\varphi(S_n)$ admet une espérance donnée par :

$E\big(\varphi(S_n)\big) = \sum_{j=0}^{+\infty}\varphi(j)P(S_n = j) = e^{-n\theta}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left((n-1)\theta\right)^j}{j!} = e^{-n\theta}e^{(n-1)\theta} = e^{-\theta}$.

7)D'après le théorème de transfert, $\varphi(S_n)^2$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{j\geq 0}\left|\varphi(j)^2P(S_n = j)\right|$ est convergente.

Or, $\forall j \in \mathbf{N}$, $\left|\varphi(j)^2P(S_n = j)\right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2j} e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^j}{j!} = \frac{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n\theta\right)^j}{j!}e^{-n\theta}$.

La série $\sum_{j\geq 0}\frac{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n\theta\right)^j}{j!}$ est convergente car c'est une série exponentielle.

La série $\sum_{j\geq 0}\left|\varphi(j)^2P(S_n = j)\right|$ qui est de même nature, converge donc également.

Donc $\varphi(S_n)^2$ admet une espérance donnée par :

$$
\begin{aligned}
E\left(\varphi(S_n)^2\right) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\varphi(j)^2P(S_n = j)\\
&= e^{-n\theta}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n\theta\right)^j}{j!}\\
&= e^{-n\theta}e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n\theta}\\
&= e^{-n\theta+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n\theta}\\
&= e^{n\theta\left(-1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)}\\
&= e^{n\theta\left(-1+1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\\
&= e^{-2\theta+\frac{\theta}{n}}.
\end{aligned}
$$

D'après la formule de Koënig, $\varphi(S_n)$ admet une variance donnée par :

$V\big(\varphi(S_n)\big) = E\left(\varphi(S_n)^2\right) - E\big(\varphi(S_n)\big)^2 = e^{-2\theta+\frac{\theta}{n}} - \left(e^{-\theta}\right)^2 = e^{-2\theta+\frac{\theta}{n}} - e^{-2\theta}$.

D'où $V\big(\varphi(S_n)\big) = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right)$.

8)a)La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $[0,\theta]$ et $\forall x \in [0,\theta],\ f'(x) = e^x$.
On a alors $\forall x \in [0,\theta],\ 1 \leq f'(x) \leq e^\theta$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b de $[0,\theta]$ (avec $a \leq b$), on a :

$1(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq e^\theta(b-a)$.

En prenant $a = 0$ et $b = \theta$, on obtient : $\theta \leq e^\theta - 1 \leq e^\theta\theta$, c'est-à-dire :

$$1 \leq \frac{e^\theta - 1}{\theta} \leq e^\theta.$$

b)h est dérivable sur $[0,1]$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
$\forall t \in [0,1],\ h'(t) = e^\theta - 1 - \theta e^{t\theta}$.

$$\begin{aligned}
h'(t) \geq 0 &\iff e^\theta - 1 \geq \theta e^{t\theta} \\
&\iff e^{t\theta} \leq \frac{e^\theta - 1}{\theta} \\
&\iff t\theta \leq \ln\left(\frac{e^\theta - 1}{\theta}\right) \\
&\iff t \leq \frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{e^\theta - 1}{\theta}\right)
\end{aligned}$$

La question II)8)a) donne : $0 \leq \ln\left(\dfrac{e^\theta - 1}{\theta}\right) \leq \theta$, puis $0 \leq \dfrac{1}{\theta}\ln\left(\dfrac{e^\theta - 1}{\theta}\right) \leq 1$.

Ce qui permet de construire le tableau de variations de h :

t	0		$\frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{e^\theta - 1}{\theta}\right)$		1
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

c)$\bullet$ D'après le tableau de variations, on a : $\forall t \in [0,1],\ h(t) \geq 0$.

En appliquant cette inégalité pour $t = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$, on a : $h\left(\dfrac{1}{n}\right) \geq 0$,

c'est-à-dire $\dfrac{1}{n}e^\theta + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - e^{\frac{\theta}{n}} \geq 0$.

D'où $e^{\frac{\theta}{n}} \leq \dfrac{e^\theta}{n} + \dfrac{n-1}{n}$.

$\bullet$ D'après les questions précédentes, on a :

$V\left(\overline{Y_n}\right) = \dfrac{e^{-\theta}\left(1 - e^{-\theta}\right)}{n}$ et $V\big(\varphi(S_n)\big) = e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right)$.

Donc $V\left(\varphi(S_n) \le V\left(\overline{Y_n}\right) \iff e^{-2\theta}\left(e^{\frac{\theta}{n}} - 1\right) \le \dfrac{e^{-\theta}\left(1-e^{-\theta}\right)}{n}$

$$\begin{aligned} &\iff e^{\frac{\theta}{n}} - 1 \le \frac{e^{\theta}\left(1-e^{-\theta}\right)}{n} \\ &\iff e^{\frac{\theta}{n}} \le 1 + \frac{e^{\theta}}{n} - \frac{1}{n} \\ &\iff e^{\frac{\theta}{n}} \le \frac{e^{\theta}}{n} + \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

ce qui est vrai, grâce au point précédent.
Donc $V\left(\varphi(S_n)\right) \le V\left(\overline{Y_n}\right)$.

d)Le risque quadratique de $\varphi(S_n)$ est :

$$\begin{aligned} R\left(\varphi(S_n), e^{-\theta}\right) &= \underbrace{\left(E(\varphi(S_n)) - e^{-\theta}\right)^2}_{=0} + V\left(\varphi(S_n)\right) \quad \text{grâce à } I)5) \\ &= V\left(\varphi(S_n)\right). \end{aligned}$$

Le risque quadratique de $\varphi(S_n)$ est :

$$\begin{aligned} R\left(\overline{Y_n}, e^{-\theta}\right) &= \underbrace{\left(E(\overline{Y_n}) - e^{-\theta}\right)^2}_{=0} + V\left(\overline{Y_n}\right) \quad \text{grâce à } I)5) \\ &= V\left(\overline{Y_n}\right). \end{aligned}$$

Compte tenu de la question précédente, on peut donc conclure que :

$$R\left(\varphi(S_n), e^{-\theta}\right) \le R\left(\overline{Y_n}, e^{-\theta}\right).$$

$\varphi(S_n)$ est donc un meilleur estimateur de $e^{-\theta}$ que $\overline{Y_n}$.