DM12 cubes - à rendre le lundi / /

Exercice :

Soit f la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

1)Justifier que f est bien définie.

2)Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

3)Montrer que $\forall x > 0,\ 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4)a)Montrer que $\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge et que pour tout $x > 0$:

$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t.$$

b)En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

5)Soient des réels $x > 0$ et $h \neq 0$ tels que $h > -\frac{x}{2}$.

a)Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ converge.

b)Etablir que $\forall t \geq 0,\ \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

c)En déduire : $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

6)En déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t.$$