**Exercice 1 (edhec 2019)**

1)a) $A-I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1)b)$(A-I)^2=O$ donne : $A^2-2A+I=O$, puis $A(-A+2I)=I$.
Donc $A$ est inversible et $A^{-1}=-A+2I$.

2)a)Comme $A=N+I$, on a : $N=A-I$ d'où $N^2=(A-I)^2=O$.
Comme $I$ et $N$ commutent, la formule du binôme est licite et donne pour tout $n\in\mathbf{N}$ :

$$A^n=(I+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I^{n-k}N^k=\binom{n}{0}I^nN^0+\binom{n}{1}I^{n-1}N^1+O+...+O$$

car pour tout $k\geq 2, N^k=O$.
On a donc $\forall n\in\mathbf{N}, A^n=I+nN$.
Comme $N=A-I$, on déduit $A^n=I+n(A-I)=I+nA-nI$.
Donc $\forall n\in\mathbf{N}, A^n=(1-n)I+nA$.

2)b)Pour $n=-1$, on obtient : $A^{-1}=2I-A$, ce qui est vrai.

3)a)Comme $(A-I)^2=O$, le polynôme $P(X)=(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de $A$.
1 est l'unique racine de $P$ donc $sp(A)\subset\{1\}$.
De plus, $A-I$ est de rang 1 donc $A-I$ n'est pas inversible, ce qui prouve que 1 est valeur propre de $A$.
Finalement, $sp(A)=\{1\}$.

3)b)Raisonnement par l'absurde : supposons que $A$ est diagonalisable.
Alors, il existe une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telle que $A=PDP^{-1}$.
Les éléments diagonaux de $D$ sont les valeurs propres de $A$ et valent 1.
On a alors $D=I$, puis $A=PIP^{-1}=I$, ce qui est absurde.

On conclut que $A$ n'est pas diagonalisable.

4)a)$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f-Id)=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)-\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(Id)=A-I$.
Donc $rg(f-Id)=rg(A-I)=dimVect(C_1,C_2,C_3)$ où $C_1$, $C_2$ et $C_3$ sont les colonnes de $A-I$.

Comme $C_2=C_3$ et $C_1=-C_3$, on a $Vect(C_1,C_2,C_3)=Vect(C_3)$.
$(C_3)$ est une famille génératrice de $Vect(C_1,C_2,C_3)$ et elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul, c'est donc une base de $Vect(C_1,C_2,C_3)$.
Donc $dimVect(C_1,C_2,C_3)=1$, puis $rg(f-Id)=1$.

4)b)$(f-Id)(u_1)=(f-Id)\big((f-Id)(e_1)\big)=(f-Id)^2(e_1)=0$ puisque $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}\big(f-Id)^2\big)=(A-I)^2=O$.
Donc $u_1\in Ker(f-Id)$.

$(f-Id)(u_2)=f(u_2)-u_2=f(e_1+e_3)-(e_1+e_3)=f(e_1)+f(e_3)-e_1-e_3$.
La première colonne de $A$ donne : $f(e_1)=-2e_2+e_3$.
La troisième colonne de $A$ donne : $f(e_3)=e_1+2e_2$.
On déduit : $(f-Id)(u_2)=-2e_2+e_3+e_1+2e_2-e_1-e_3=0$.
Donc $u_2\in Ker(f-Id)$.

Enfin, $u_1=(f-Id)(e_1)=f(e_1)-e_1=(-2e_2+e_3)-e_1=-e_1-2e_2+e_3$.

$u_1$ et $u_2$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(u_1,u_2)$ est libre.

Enfin, le théorème du rang donne :
$dimKer(f-Id)=dim\mathbf{R}^3-rg(f-Id)=3-1=2$.

Résumons : $(u_1,u_2)$ est une famille libre de $Ker(f-Id)$ dont le cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de $Ker(f-Id)$, c'est donc une base de $Ker(f-Id)$.

5)a)On a : $u_1=(-1,-2,1)$, $u_2=(1,0,1)$ et $e_1=(1,0,0)$.

Pour tous réels $a$, $b$ et $c$, on a :

$$\begin{aligned}
au_1+bu_2+ce_1=0 &\iff a(-1,-2,1)+b(1,0,1)+c(1,0,0)=(0,0,0)\\
&\iff (-a+b+c,-2a,a+b)=(0,0,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrr} - & a & + & b & + & c & = 0\\ -2 & a & & & & & = 0\\ & a & + & b & & & = 0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 0\\ a & = & 0\\ b & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc la famille $(u_1,u_2,e_1)$ est libre.

C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

5)b)$u_1\in Ker(f-Id)$ donc $f(u_1)=u_1=1u_1+0u_2+0e_1$.
De même $f(u_2)=u_2=0u_1+1u_2+0e_1$.
De plus, $u_1=f(e_1)-e_1$ donc $f(e_1)=u_1+e_1=1u_1+0u_2+1e_1$.

Donc $T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

6)$P$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $(u_1,u_2,e_1)$, elle est donc inversible.

La formule de changement de base donne : $T=P^{-1}AP$.

7)a)Soit $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
M \in E &\iff MT = TM\\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & a+c\\ d & e & d+f\\ g & h & g+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\\
&\iff g = h = d = 0 \text{ et } a = i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Donc} E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & e & f\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}, (a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5 \right\}\\
&= \left\{ a(E_{1,1} + E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3}, (a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5 \right\}\\
&= \text{Vect}\left(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}\right).
\end{aligned}
$$

$(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est donc une famille génératrice de $E$.

Cette famille est libre. En effet, pour tous réels $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$, on a :

$a\left(E_{1,1} + E_{3,3}\right) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3} = O$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \iff a = b = c = d = e = 0.$$

$(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est donc une base de $E$ et $dimE = 5$.

7)b)Remarquons tout d'abord que $T = P^{-1}AP \iff A = PTP^{-1}$.

Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$$
\begin{aligned}
NA = AN &\iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N\\
&\iff P^{-1}\left(NPTP^{-1}\right)P = P^{-1}\left(PTP^{-1}N\right)P\\
&\iff \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right).
\end{aligned}
$$

7)c)$N \in F$

$\iff NA = AN$

$\iff \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right)$

$\iff P^{-1}NP \in E$

$\iff P^{-1}NP \in \text{Vect}\left(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}\right)$

$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \mid P^{-1}NP = a\left(E_{1,1} + E_{3,3}\right) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3}$

$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \mid N = P\left(a\left(E_{1,1} + E_{3,3}\right) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3}\right)P^{-1}$

$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \mid N = aP\left(E_{1,1} + E_{3,3}P^{-1}\right) + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + dPE_{2,2}P^{-1}$
$+ ePE_{2,3}P^{-1}$

$\iff N \in \text{Vect}\left(P\left(E_{1,1} + E_{3,3}\right)P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)$

Donc $F = \text{Vect}\left(P\left(E_{1,1} + E_{3,3}\right)P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)$.

**Exercice 2 (edhec 2019)**

1)$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

2)a)Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$. Supposons l'événement $B_1 \cap ... \cap B_{i-1}$ réalisé.
L'urne comporte alors $n-(i-1) = n-i+1$ boules dont $(n-1)-(i-1) = n-i$ boules blanches.
La probabilité de tirer une blanche au$i$-ième tirage vaut alors $\dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Ainsi, $P_{B_1 \cap ... \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

2)b)Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B_1)P_{B_1}(B_2)...P_{B_1 \cap ... \cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \cap ... \cap B_{k-1}}(N_k) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

> Remarque
> Pour calculer les probabilités conditionnelles, on a utilisé la question 2)a) en faisant varier $i$ de 2 à $k-1$.

2)c)$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
Donc $X \hookrightarrow \mathscr{U}\,([\![1, n]\!])$.

Le cours donne $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3)a)Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, notons $B'_i =$« le $i$-ième tirage donne une blanche numérotée 0 ».
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X = k \cap Y = 0) &= P(B'_1 \cap B'_2 \cap ... \cap B'_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B'_1)P_{B'_1}(B'_2)...P_{B'_1 \cap ... \cap B'_{k-2}}(B'_{k-1})P_{B'_1 \cap ... \cap B'_{k-1}}(N_k) \\
&= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
&= \frac{n-k}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

> Remarque
> Les probabilités ont été calculées comme pour la question 3)b), mais avec au numérateur la boule blanche portant le numéro 1 en moins.

3)b)La formule des probabilités totales pour le sce $(X = k)_{1\leq k\leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k\cap Y=0)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)}\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=0}^{n-1} j \quad \text{en posant } j=n-k\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\times\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3)c)$Y(\Omega) = \{0,1\}$ donc $Y$ suit une loi de Bernoulli.
Son paramètre est $P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$.

4)a)programme :

```
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    nB=nB-1
    u=rd.randint(1,nB+2)
    X=X+1
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
```

b)programme :

```
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
Y=0
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    if u==1 :
        Y=1
    nB=nB-1
    u=rd.randint(1,nB+2)
    X=X+1
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
print("la valeur de Y est",Y)
```

**Exercice 3 (edhec 2019)**

1)$u_1 = \int_0^1 (1-t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

$u_2 = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^2 dt = \int_0^1 \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt = \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$.

2)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt - \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(1-t^2\right)^{n+1} - \left(1-t^2\right)^n\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \left((1-t^2) - 1\right) dt \\ &= \int_0^1 -t^2 \left(1-t^2\right)^n dt. \end{aligned}$$

$\forall t \in [0,1],\ -t^2\left(1-t^2\right)^n \leq 0$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1 : $\int_0^1 -t^2\left(1-t^2\right)^n dt \leq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

b)$\forall t \in [0,1],\ \left(1-t^2\right)^n \geq 0$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1 : $\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq 0$.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente.

3)a)La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de la loi $\mathscr{N}\left(0,\sigma^2\right)$.

En conséquence, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = 1$.

b)Choisissons $\sigma > 0$ de sorte que $\frac{1}{2\sigma^2} = n$, c'est-à-dire $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2n}}$.

La question 3)a) donne alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2n}} \times \sqrt{2\pi}} e^{-nt^2} dt = 1$ ou encore

$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{n}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = 1$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

La fonction $t \mapsto e^{-nt^2}$ est paire.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

c)Etudions sur $\mathbf{R}$ la fonction $f : t \mapsto 1 - t^2 - e^{-t^2}$.
$f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ par comme et composée de fonctions dérivables.
$\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) = -2t + 2te^{-t^2} = 2t\left(e^{-t^2} - 1\right)$.

$\forall t \in \mathbf{R},\ -t^2 \leq 0$ donc $e^{-t^2} \leq 1$, puis $e^{-t^2} - 1 \leq 0$.
$f'(t)$ est donc du signe contraire de $2t$, d'où le tableau de variations de $f$ :

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

Le tableau donne $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) \leq 0$, ce qui prouve que $\forall t \in \mathbf{R},\ e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.
d)On a déjà prouvé dans la question 2)b) que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq 0$.
L'inégalité $\forall t \in [0, 1],\ e^{-t^2} \geq 1 - t^2$ donne par croiss. de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$ :
$\forall t \in [0, 1],\ \left(e^{-t^2}\right)^n \geq \left(1 - t^2\right)^n$, c'est-à-dire : $e^{-nt^2} \geq \left(1 - t^2\right)^n$.
En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :
$\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2} dt \geq \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt$, c'est-à-dire : $u_n \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2} dt \quad (1)$
Enfin, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-nt^2} dt \geq 0$ car $t \mapsto e^{-nt^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, c'est-à-dire par Chasles :
$\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt \quad (2)$
En recollant (1) et (2), on a : $u_n \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$. Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.
$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
4)• $\displaystyle\int_0^1 (1 - t)^n dt = \left[-\frac{(1 - t)^{n+1}}{n + 1}\right]_0^1 = \frac{1}{n + 1}$.
• $\forall t \in [0, 1],\ t^2 \leq t \leq 1$ donc $-t^2 \geq -t \geq -1$, puis $1 - t^2 \geq 1 - t \geq 0$.
$x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbf{R}_+$, on a : $\forall t \in [0, 1],\ \left(1 - t^2\right)^n \geq (1 - t)^n$.
En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$\displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt \geq \int_0^1 (1-t)^n dt$, c'est-à-dire : $u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$.

• $\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge comme série harmonique. D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge.

Comme $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$, on conclut par la règle de comparaison sur les séries à termes positifs que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

5)a)Effectuons une IPP sur $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt$ en posant :

$u(t) = (1-t^2)^{n+1}$ $\qquad v'(t) = 1$

$u'(t) = -2(n+1)t\left(1-t^2\right)^n$ $\qquad v(t) = t$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont $C^1$ sur $[0,1]$ donc l'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left[t\left(1-t^2\right)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -2(n+1)t^2\left(1-t^2\right)^n dt \\
&= 0 + 2(n+1)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt \\
&= (2n+2)\int_0^1 \left((t^2-1)+1\right)\left(1-t^2\right)^n dt \qquad \text{astuce classique !} \\
&= (2n+2)\int_0^1 \left(\left(1-t^2\right)^n - \left(1-t^2\right)^{n+1}\right) dt \\
&= (2n+2)\left(\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt - \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt\right) \\
&= (2n+2)\left(u_n - u_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

b)• L'égalité précédente donne $u_{n+1} = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$,

soit $(2n+3)u_{n+1} = (2n+2)u_n$. Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}u_n$.

• Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $u_0 = \dfrac{4^0(0!)^2}{1!} = 1$ ». C'est vrai car $u_0 = 1$ par énoncé.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3} u_n \\
&= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(2n+2)^2 4^n (n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\
&= \frac{4(n+1)^2 4^n (n!)^2}{(2n+3)!} \\
&= \frac{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}{(2n+3)!}.
\end{aligned}
$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

c)$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \qquad (*)$

En élevant au carré, on a : $(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}\right)^2$.

En utilisant $(*)$ avec $n \to 2n$, on a aussi $(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi 2n}(2n)^{2n} e^{-2n}$.

Par quotient d'équivalents, on déduit :

$\dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4^n \left(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}\right)^2}{(2n+1)\sqrt{2\pi 2n}(2n)^{2n} e^{-2n}}$.

$u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4^n \times 2\pi n \times n^{2n} e^{-2n}}{(2n+1)\sqrt{4\pi n} \times 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}}$

$u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi n}{(2n+1) \times 2\sqrt{\pi n}}$

$u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2\sqrt{\pi n}}$ car $2n+1 \underset{+\infty}{\sim} 2n$

D'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

6)a)fonction

```
def fact(n):
    f=1
    for k in range(1,n+1):
        f=f*k
    return f
```

b)On complète la fonction ci-dessous avec :

```
n=int(input("entrer n"))
u=(4**n*fact(n)**2)/fact(2*n+1)
print(u)
```

**Problème (edhec 2019)**

Partie I

1)• $f$ est définie sur $\mathbf{R}$.

• $f$ est continue sur $[1,+\infty[$ comme inverse et produit de fonctions continues. $f$ est continue sur $]-\infty,1[$ comme fonction nulle.
Donc $f$ est continue sur $\mathbf{R}$, sauf éventuellement en 1.

• $f$ est nulle sur $]-\infty,1[$ et positive sur $[1,+\infty[$. Donc $\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)\geq 0$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)dt$ converge et vaut 0 car $f$ est nulle sur $]-\infty,1[$.

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}}dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{1+\frac{1}{\theta}}}dt$,
intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ du fait que $1+\dfrac{1}{\theta}>1$.

Donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

De plus, on a :

$$\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{1}{\theta t^{1+\frac{1}{\theta}}}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{1}{\theta}\times t^{-1-\frac{1}{\theta}}dt=\lim_{x\to+\infty}\left[-t^{-\frac{1}{\theta}}\right]_{1}^{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{t^{\frac{1}{\theta}}}\right]_{1}^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}+1\right)=1 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\theta}}=+\infty.$$

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=0+1=1$.

On conclut que $f$ est une densité.

2)• $X$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|tf(t)|$ converge.

La fonction $t\mapsto tf(t)$ est nulle sur $]-\infty,1[$ et positive sur $[1,+\infty[$.
La convergence absolue précédente se ramène alors à la convergence simple de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tf(t)$.

Pour tout $x>1$, on a :

$$\int_{1}^{x} tf(t)=\int_{1}^{x} t\times\frac{1}{\theta t^{1+\frac{1}{\theta}}}dt=\frac{1}{\theta}\int_{1}^{x} t^{-\frac{1}{\theta}}dt=\frac{1}{\theta}\left[\frac{t^{-\frac{1}{\theta}+1}}{\frac{-1}{\theta}+1}\right]_{1}^{x}=\frac{1}{-1+\theta}\left[\frac{1}{t^{\frac{1}{\theta}-1}}\right]_{1}^{x}$$
$$=\frac{1}{-1+\theta}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}}-1\right).$$

Or, $0<\theta<\dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{\theta}>2$, puis $\dfrac{1}{\theta}-1>1$.

On déduit : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\theta}-1} = +\infty$, puis $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x tf(t) = \frac{1}{-1+\theta} \times (0-1) = \frac{1}{1-\theta}$.

Donc $\int_1^{+\infty} tf(t)$ converge et vaut $\frac{1}{1-\theta}$.

On conclut que $X$ admet un espérance et que $E(X) = \frac{1}{1-\theta}$.

• $X$ admet une variance si et seulement si $X^2$ admet une espérance, c'est-à-dire si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|t^2 f(t)\right|$ converge.

La fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ est nulle sur $]-\infty, 1[$ et positive sur $[1, +\infty[$.
La convergence absolue précédente se ramène alors à la convergence simple de $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)$.

Pour tout $x > 1$, on a :

$\int_1^x t^2 f(t) = \int_1^x t^2 \times \frac{1}{\theta t^{1+\frac{1}{\theta}}} dt = \frac{1}{\theta} \int_1^x t^{-\frac{1}{\theta}+1} dt = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{t^{-\frac{1}{\theta}+2}}{\frac{-1}{\theta}+2} \right]_1^x = \frac{1}{-1+2\theta} \left[ \frac{1}{t^{\frac{1}{\theta}-2}} \right]_1^x$
$= \frac{1}{-1+2\theta} \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-2}} - 1 \right)$.

Or, $0 < \theta < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{\theta} > 2$, puis $\frac{1}{\theta} - 2 > 0$.

On déduit : $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\theta}-2} = +\infty$, puis $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-2}} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^2 f(t) = \frac{1}{-1+2\theta} \times (0-1) = \frac{1}{1-2\theta}$.

Donc $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)$ converge et vaut $\frac{1}{1-2\theta}$.

On conclut que $X^2$ admet un espérance et que $E(X^2) = \frac{1}{1-2\theta}$.

D'après la formule de Koenig, $X$ admet une variance donnée par :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{1}{1-2\theta}\right) - \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2$.