
Correction DM7

Exercice 1

1)a) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

$\forall x \geq 0, f'(x) = (1+x)e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

De plus, f est continue (car dérivable) sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de bijection, f est donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [0, +\infty[.$$

b) $1 \in [0, +\infty[$ (arrivée) admet donc un unique antécédent $\alpha \in [0, +\infty[$ (départ).

Ainsi, il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $f(\alpha) = 1$, c'est-à-dire $\alpha e^\alpha = 1$.

2) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « U_n existe et $U_n \geq 0$ ».

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « U_0 existe et $U_0 \geq 0$ », c'est vrai car U_0 existe et vaut $\alpha \geq 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $U_n \geq 0$ donc $\frac{1}{2}U_n \geq 0$.

Mais comme f^{-1} est définie sur $[0, +\infty[$, on conclut que $U_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{2}U_n\right)$ existe.

Enfin, $U_{n+1} \geq 0$ car f^{-1} est à valeurs dans $[0, +\infty[$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par l'axiome de récurrence, on conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n$ existe et $U_n \geq 0$.

$$\begin{aligned} 3) U_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{1}{2}U_n\right) &\iff f(U_{n+1}) = \frac{1}{2}U_n \iff U_{n+1}e^{U_{n+1}} = \frac{1}{2}U_n \\ &\iff U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n e^{-U_{n+1}}. \end{aligned}$$

4) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $U_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$ ».

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « $U_0 = e^{-S_0}$ ».

Or, $e^{-S_0} = e^{-U_0} = e^{-\alpha} = \frac{1}{e^\alpha} = \alpha$ d'après la question 1)b) et $\alpha = U_0$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{1}{2}U_n e^{-U_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-S_n}}{2^n} e^{-U_{n+1}} \text{ par hyp. de récurrence} \\ &= \frac{e^{-(S_n+U_{n+1})}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par l'axiome de récurrence, on conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

5) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, U_k \geq 0$ donc $S_n \geq 0$.

On déduit pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$-S_n \leq 0, \text{ puis } e^{-S_n} \leq 1 \text{ et } \frac{e^{-S_n}}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \leq \frac{1}{2^n}$ et même $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2^n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

6) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ puisque $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Elle converge puisque son paramètre est dans $] -1, 1[$.

De plus, $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \leq \frac{1}{2^n}$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge.

Exercice 2

1) Effectuons une intégration par parties dans $I_0 = \int_0^1 \ln(1+x) dx$ en posant :

$$f'(x) = 1 \quad g(x) = \ln(1+x)$$

$$f(x) = x \quad g'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

f et g sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc l'IPP est licite et donne :

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx,$$

$$\text{c'est-à-dire } I_0 = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \quad (*)$$

$$\text{De plus, } \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

En reportant dans (*), on obtient : $I_0 = 2 \ln 2 - 1$.

$$\begin{aligned} 2) \forall n \in \mathbf{N}, I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} \ln(1+x) dx - \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \\ &= \int_0^1 (x^{n+1} \ln(1+x) - x^n \ln(1+x)) dx \\ &= \int_0^1 x^n (x-1) \ln(1+x) dx. \end{aligned}$$

$\forall x \in [0, 1], x^n (x-1) \ln(1+x) \leq 0$ donc $\int_0^1 x^n (x-1) \ln(1+x) dx \leq 0$ en intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0$, ce qui prouve que $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

3) a) $\forall x \in [0, 1], 1 \leq 1+x \leq 2$ donc $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2 \leq 1$.

En multipliant membre à membre par x^n (positif), on conclut que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n$.

b) En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n dx, \text{ c'est-à-dire } 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$$\text{Or, } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ d'après la propriété des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4) a) Effectuons une intégration par parties dans $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ en posant :

$$f'(x) = x^n \quad g(x) = \ln(1+x)$$

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad g'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

f et g sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc l'IPP est licite et donne :

$$\int_0^1 x^n \ln(1+x) dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x} dx,$$

c'est-à-dire $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$

b) $\forall x \in [0, 1], 1 \leq 1+x \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$, puis $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1.$

En multipliant membre à membre par x^{n+1} (positif), on a :

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}.$$

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx, \text{ avec } \int_0^1 x^{n+1} dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}.$$

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}.$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, d'après la propriété des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = 0.$

Par ailleurs, l'égalité de la question 4)a) donne en multipliant par n :

$$nI_n = \frac{n \ln 2}{n+1} - \frac{n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = 0 \text{ donnent finalement :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \ln 2.$$

On a donc $nI_n \underset{+\infty}{\sim} \ln 2$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}.$