TD10 - fonctions de deux variables

Exercice 1 (d'après ecricome 2008) ★ ☆ ☆☆
Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = 1 + \ln(x+y).$$

1)Déterminer l'ensemble de définition D de f, puis le représenter dans le plan.

2)Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur D et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

3)f admet-elle un extrémum local sur D ?

4)Soit $c \in \mathbf{R}$. Déterminer la ligne de niveau c de f.

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y.$$

1)Déterminer l'unique point critique de f.

2)Montrer que f admet en ce point un minimum local.

3)Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) - f(-1,1) = (x+y)^2 + 2(y-1)^2$.
Conclure que f admet en $(-1,1)$ un minimum global.

Exercice 3 (eml 2006) ★ ★ ☆☆
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (1-x)(y-2)(x+y-6).$$

1)Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$:
$\partial_1 f(x,y) = (y-2)(-2x-y+7)$ et $\partial_2 f(x,y) = (1-x)(x+2y-8)$.

2)Montrer que f admet 4 points critiques.

3)Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$ et que sa matrice hessienne en (x,y) vaut

$$\begin{pmatrix} -2y+4 & -2x-2y+9 \\ -2x-2y+9 & -2x+2 \end{pmatrix}$$

4)Etudier si f admet un extrémum local en chacun des points critiques trouvés dans la question 2) et préciser leur nature.

5)Déterminer $\lim\limits_{y \to +\infty} f(0,y)$. Déduire que f n'a pas de maximum global en (2,3).

Exercice 4 (eml 2012) ★ ☆ ☆☆
Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par :

$$f(x,y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{\ln y}{x}.$$

1)Justifier que f est $\mathscr{C}^2$ sur U, puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2)Vérifier que (e,e) est un point critique de f.

3)f admet-elle un extrémum local en (e,e) ?

Exercice 5 (eml 2004) ★ ★ ☆☆
Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U =]0,1[\times]0,1[$ par :

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}.$$

1)Représenter U.

2)Justifier que f est $\mathscr{C}^2$ sur U, puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

3)Déterminer l'unique point I de U en lequel f est susceptible de posséder un extrémum local.

4)Montrer que f admet en I un minimum local.

Exercice 6 (edhec 2005) ★ ★ ★☆
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

1)Justifier que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$, puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2)Vérifier que $(-1,0)$ est un point critique de f, puis que f admet en ce point un extrémum local. Quelle est sa nature ?

3)a)Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \geq xe^x$.

b)En étudiant $g : x \mapsto xe^x$, conclure que f possède un minimum global en $(-1,0)$.

Exercice 7 (ecricome 1999) ★ ★ ★☆
Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\times]0,1[$ par :

$$f(x,y) = x^2 - x + xy^2 - xy.$$

1)Représenter U.

2)Justifier que f est $\mathscr{C}^2$ sur U, puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

3)Montrer que f admet un unique extrémum local sur U et préciser sa nature.

4)Pour tout réel $x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, on considère la fonction g_x définie pour tout réel $y \in]0,1[$ par :

$$g_x(y) = f(x,y) + \frac{25}{64}.$$

a)Etudier les variations de g_x sur $]0,1[$.

b)Vérifier que g_x admet un minimum en $\frac{1}{2}$ et que ce minimum est positif ou nul.

c)En déduire que $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \geq -\dfrac{25}{64}$. Conclure.

Indications / Réponses

<u>Exercice 1</u>

2)$\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$.

3)Pas de point critique donc pas d'extrémum local.

4)$L_c = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ y = -x + e^{c-1}\right\}$, c'est une droite.

<u>Exercice 2</u>

1)$\partial_1 f(x,y) = 2x + 2y$ et $\partial_2 f(x,y) = 6y + 2x - 4$. Point critique = $(-1,1)$.

2)$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2$ et $\partial^2_{2,2} f(x,y) = 6$.

La matrice hessienne de f en $(-1,1)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, de valeurs propres strictement positives.

<u>Exercice 3</u>

2)Les points critiques de f sont $(1,2)$; $(1,5)$; $(4,2)$ et $(2,3)$.

4)En (1,2) ; (4,2) et (1,5) = col. En (2,3)=maximum local.

<u>Exercice 4</u>

1)$\partial_1 f(x,y) = \dfrac{1}{xy} - \dfrac{\ln y}{x^2}$ et $\partial_2 f(x,y) = -\dfrac{\ln x}{y^2} + \dfrac{1}{xy}$.

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = -\dfrac{1}{x^2 y} + \dfrac{2\ln y}{x^3}$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{x^2 y}$

$\partial^2_{2,2} f(x,y) = -\dfrac{1}{xy^2} + \dfrac{2\ln x}{y^3}$.

3)La matrice hessienne de f en (e,e) est $\begin{pmatrix} e^{-3} & -2e^{-3} \\ -2e^{-3} & e^{-3} \end{pmatrix}$, de valeurs propres $-e^{-3}$ et $3e^{-3}$. C'est un col.

<u>Exercice 5</u>

2)$\partial_1 f(x,y) = \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{(x+y)^2}$ et $\partial_2 f(x,y) = \dfrac{1}{(1-y)^2} - \dfrac{1}{(x+y)^2}$.

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \dfrac{2}{(1-x)^3} + \dfrac{2}{(x+y)^3}$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = \dfrac{2}{(x+y)^3}$

$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \dfrac{2}{(1-y)^3} + \dfrac{2}{(x+y)^3}$.

3)On résout $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = 0$, ce qui donne $x = y = \frac{1}{3}$. Donc $I\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4)La matrice hessienne de f en I est $\begin{pmatrix} 27/2 & 27/4 \\ 27/4 & 27/2 \end{pmatrix}$ de val. propres $27/4$ et $81/4$.

<u>Exercice 6</u>

1)$\partial_1 f(x,y) = (1 + xy^2 + x)e^{x(y^2+1)}$ et $\partial_2 f(x,y) = 2x^2 y e^{x(y^2+1)}$.

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = (y^2+1)(2 + xy^2 + x)e^{x(y^2+1)}$,

$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2xy(2 + xy^2 + x)e^{x(y^2+1)}$,

$\partial^2_{2,2} f(x,y) = 2x^2(2xy^2 + 1)e^{x(y^2+1)}$.

2)$\partial_1 f(-1,0) = \partial_2 f(-1,0) = 0$.

La matrice hessienne de f en $(-1,0)$ est $\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont e^{-1} et $2e^{-1}$: minimum local.

3)b)L'étude des variations de g donne $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) \geq -e^{-1} = f(-1,0)$.

<u>Exercice 7</u>

2)$\partial_1 f(x,y) = 2x - 1 + y^2 - y$ et $\partial_2 f(x,y) = 2xy - x$.

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2y - 1$ et $\partial^2_{2,2} f(x,y) = 2x$.

3)Un seul point critique : $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$.

La matrice hessienne de f en ce point est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont 2 et 5/4 : minimum local en $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$.

4)a)$g_x'(y) = \partial_2 f(x,y) = 2xy - x = x(2y-1)$ du signe de $2y - 1$.

y	0		$1/2$		1
$g_x'(y)$		$-$	0	$+$	
$g_x(y)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Le minimum de g_x est $g_x(1/2) = x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{64} = \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 \geq 0$.