
Exercice (hec 2017)

1)a) $A^2 = I$.

1)b) $A^2 - I = O$ donc $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A .Les racines de P sont -1 et 1 . Donc $\text{spec}(A) \subset \{-1, 1\}$. $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles car de rang 1. Donc -1 et 1 sont bien des valeurs propres de A .Ainsi, $\text{spec}(A) = \{-1, 1\}$.1)c) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ admet 2 valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable d'après le théorème de réduction.

2)a) Le programme affiche $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $Q = P^{-1}B$ et $D = QP$. Donc $D = P^{-1}BP$. B est semblable à D , elle a donc les mêmes valeurs propres que D .Donc $\text{spec}(B) = \{-1, 1\}$.

2)b) •
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(B) \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
$$\iff x = y.$$

Donc $E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires) et génératrice de $E_1(A)$, c'est donc une base de $E_1(A)$.

•
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
$$\iff x = -y \text{ et } z = 0.$$

Donc $E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (1 vecteur non nul) et génératrice de $E_{-1}(A)$, c'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

3)a) Chacun des n^2 coefficients peut prendre 2 valeurs possibles.

Il y a donc 2^{n^2} matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$.

3)b) Pour toute colonne $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons x_j , le numéro de ligne où se trouve le 1.

Le nombre de possibilités de placer les 1 correspond au nombre de permutations (x_1, \dots, x_n) de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il y en a $n!$

Les 1 étant placés, il n'y a qu'une seule façon de placer les 0.

Il y a donc $n!$ matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1.

4)a) Soit $y \in \text{Im}(u - id)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (u - id)(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } (u + id)(y) &= (u + id)((u - id)(x)) \\ &= (u + id) \circ (u - id)(x) \\ &= (u^2 - id)(x) \\ &= 0 \text{ car } u^2 - id = 0. \end{aligned}$$

Donc $y \in \text{Ker}(u + id)$. Ainsi, $\text{Im}(u - id) \subset F$.

4)b) Comme $\text{Im}(u - id) \subset F$, on déduit : $\dim(\text{Im}(u - id)) \leq \dim F$, c'est-à-dire : $\dim(\text{Im}(u - id)) \leq p$ (*)

Puis, le théorème du rang donne :

$$\dim(\text{Im}(u - id)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u - id)) = \dim(E) - \dim(G) = n - q.$$

En remplaçant dans (*), on obtient : $n - q \leq p$, c'est-à-dire : $p + q \geq n$.

4)c) $F = E_{-1}(u)$ et $G = E_1(u)$ étant des sous-espaces propres de u , la somme de leur dimension ne peut dépasser n .

On a donc $p + q \leq n$, d'où $p + q = n$ compte tenu de la question 4)b).

La famille (f_1, \dots, f_p) est une base de F , c'est donc une famille libre dont les vecteurs appartiennent au même sous-espace propre.

La famille (g_1, \dots, g_q) est une base de G , c'est donc une famille libre dont les vecteurs appartiennent au même sous-espace propre.

En réunissant des familles libres provenant de sous-espaces propres de u , on obtient une famille libre de E .

Donc $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre de E .

C'est une famille libre de $p + q = n$ vecteurs de E avec $\dim E = n$, c'est donc une base de E .

4)d) $f_1 \in \text{ker}(u + id)$ donc $u(f_1) = -f_1$.

$g_1 \in \text{ker}(u - id)$ donc $u(g_1) = g_1$.

On déduit par linéarité de u :

$$u(g_1 - f_1) = u(g_1) - u(f_1) = g_1 + f_1.$$

$$u(g_1 + f_1) = u(g_1) + u(f_1) = g_1 - f_1.$$

4)e) Soit $\mathcal{B} = (g_1 - f_1, g_1 + f_1, \dots, g_p - f_p, g_p + f_p, g_{p+1}, \dots, g_q)$.

Montrons que \mathcal{B} est libre.

Pour tous réels $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, c_{p+1}, \dots, c_q$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p (a_i(g_i - f_i) + b_i(g_i + f_i)) + \sum_{i=p+1}^q c_i g_i &= 0 \\ \iff \sum_{i=1}^p ((a_i + b_i)g_i + (-a_i + b_i)f_i) + \sum_{i=p+1}^q c_i g_i &= 0 \\ \iff \sum_{i=1}^p (-a_i + b_i)f_i + \sum_{i=1}^p (a_i + b_i)g_i + \sum_{i=p+1}^q c_i g_i &= 0 \\ \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, -a_i + b_i = 0 \text{ et } a_i + b_i = 0, \forall i \in \llbracket p+1, q \rrbracket, c_i = 0 \end{aligned}$$

compte-tenu que la famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_p, g_{p+1}, \dots, g_q)$ est libre.

$$\iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_i = b_i = 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket p+1, q \rrbracket, c_i = 0.$$

Donc \mathcal{B} est libre.

Le cardinal de \mathcal{B} est $2p + (q - p) = p + q = n$.

\mathcal{B} est une famille libre de n vecteurs de E avec $\dim E = n$, c'est donc une base de E .

Enfin, on a $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(g_i - f_i) = g_i + f_i$ et $u(g_i + f_i) = g_i - f_i$ ainsi que $\forall i \in \llbracket p+1, q \rrbracket, u(g_i) = g_i$.

Du fait des égalités ci-dessus, la matrice de u dans la base \mathcal{B} est formée de 0 et de 1. Elle appartient donc à $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$.

Problème (hec 2017)

Partie I :

1)a) $G_{a,b}$ est dérivable sur \mathbf{R}_+ comme composée de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbf{R}_+, G'_{a,b}(x) = (-a - bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$.

Comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $\forall x \in \mathbf{R}_+, G'_{a,b}(x) < 0$.

Donc $G_{a,b}$ est strictement décroissante sur \mathbf{R}_+ .

$G_{a,b}$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur \mathbf{R}^+ , elle réalise donc une bijection de \mathbf{R}_+ sur $G_{a,b}(\mathbf{R}_+)$.

De plus, $G_{a,b}(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_{a,b}(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 0$.

On a donc $G_{a,b}(\mathbf{R}_+) =]0, 1]$.

Ainsi, $G_{a,b}$ réalise une bijection de \mathbf{R}_+ sur $]0, 1]$.

1)b) $ax + \frac{b}{2}x^2 = y \iff \frac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = a^2 + 2by > 0$ et les racines sont $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$.

1)c) Soit $u \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned}x = G_{a,b}^{-1}(1 - u) &\iff G_{a,b}(x) = 1 - u \\&\iff \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = 1 - u \\&\iff -ax - \frac{b}{2}x^2 = \ln(1 - u) \\&\iff ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(1 - u) \\&\iff x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2b \ln(1 - u)}}{b}.\end{aligned}$$

Comme $x \in \mathbf{R}_+$, la solution $\frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b \ln(1 - u)}}{b} < 0$ ne convient pas.

$$\text{On a donc } G_{a,b}^{-1}(1 - u) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(1 - u)}}{b}.$$

2)a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 G_{a,b}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp(-ax) \exp\left(-\frac{b}{2}x^2\right)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp(-ax) = 0$ par croissances comparées

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{b}{2}x^2\right) = 0$ par composée de limites.

On déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 G_{a,b}(x) = 0$, ce qui entraîne que $G_{a,b}(x) \underset{+\infty}{=} o(1/x^2)$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge comme intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère de négligeabilité sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} G_{a,b}(x) dx$ converge.

En outre, $\int_0^1 G_{a,b}(x) dx$ converge puisque $G_{a,b}$ est continue sur $[0, 1]$.

Par Chasles, on conclut que $\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx$ converge.

$$2)b) \text{ On a : } f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b}} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - (-\frac{a}{b})}{\sqrt{\frac{1}{b}}} \right)^2 \right].$$

On reconnaît la densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $m = -\frac{a}{b}$ et de variance $\sigma^2 = \frac{1}{b}$.

2)c) • Mettons $-ax - \frac{b}{2}x^2$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned} -ax - \frac{b}{2}x^2 &= -\frac{b}{2} \left(x^2 + \frac{2a}{b}x \right) \\ &= -\frac{b}{2} \left[\left(x + \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{a^2}{b^2} \right] \\ &= -\frac{b}{2} \left(x + \frac{a}{b} \right)^2 + \frac{a^2}{2b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On déduit : } G_{a,b}(x) &= \exp \left[-\frac{b}{2} \left(x + \frac{a}{b} \right)^2 + \frac{a^2}{2b} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{b}{2} \left(x + \frac{a}{b} \right)^2 \right] \exp \left(\frac{a^2}{2b} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp \left(\frac{a^2}{2b} \right) f(x). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp \left(\frac{a^2}{2b} \right) \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

• Calculons maintenant $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

On sait d'après 2)b) que $X \hookrightarrow \mathcal{N} \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b} \right)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)dx &= P(X \geq 0) \\
&= P(X - (-a/b) \geq a/b) \\
&= P\left(\frac{X - (-a/b)}{1/\sqrt{b}} \geq \frac{a/b}{1/\sqrt{b}}\right) \\
&= P\left(X^* \geq \frac{a}{\sqrt{b}}\right) \\
&= 1 - P\left(X^* < \frac{a}{\sqrt{b}}\right) \\
&= 1 - \phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) \\
&= \phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right) \text{ car } \forall x \in \mathbf{R}, \phi(-x) = 1 - \phi(x).
\end{aligned}$$

- On conclut que $\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$.

3)a) • La fonction $f_{a,b}$ est continue sur \mathbf{R}_+ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit et la composée de fonctions continues. Elle est continue également sur \mathbf{R}_- (fonction nulle).

Donc $f_{a,b}$ est continue sur \mathbf{R} sauf peut-être en 0.

- $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$.

- Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\int_0^t f_{a,b}(x)dx = \left[-\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)\right]_0^t = 1 - \exp\left(-at - \frac{b}{2}t^2\right).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(-at - \frac{b}{2}t^2\right) = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f_{a,b}(x)dx = 1.$$

Donc $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 1.

Enfin, $f_{a,b}$ étant nulle sur \mathbf{R}_- , $\int_{-\infty}^0 f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 0.

On conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 1.

- Ainsi, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

3)b) Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\int_0^t |x f_{a,b}(x)|dx = \int_0^t x(a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) dx.$$

Faisons une intégration par parties en posant :

$$u(x) = x \quad v'(x) = (a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$$

$$u'(x) = 1 \quad v(x) = -\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right).$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, t]$. L'intégration par parties est licite et donne :

$$\begin{aligned} \int_0^t x(a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) dx &= \left[-x \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)\right]_0^t - \int_0^t -\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) dx \\ &= -t \exp\left(-at - \frac{b}{2}t^2\right) + \int_0^t G_{a,b}(x) dx \quad (*) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -t \exp\left(-at - \frac{b}{2}t^2\right) = 0 \text{ (déjà fait) et } \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx \text{ converge.}$$

Par passage à la limite dans (*), $\int_0^t x(a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) dx$ converge

$$\text{et } \int_0^{+\infty} x(a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) dx = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx.$$

Donc $\int_0^{+\infty} |x f_{a,b}(x)| dx$ converge.

Par ailleurs, $\int_{-\infty}^0 |x f_{a,b}(x)| dx$ converge puisque $f_{a,b}$ est nulle sur \mathbf{R}_-^* .

On conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f_{a,b}(x)| dx$ converge, ce qui montre que X admet

une espérance donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x(a + bx) \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) dx = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x) dx.$$

4)a) Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(X \geq x) &= P\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b} \geq x\right) = P\left(\sqrt{a^2 + 2bY} \geq a + bx\right) \\ &= P\left(a^2 + 2bY \geq (a + bx)^2\right) = P\left(Y \geq \frac{(a + bx)^2 - a^2}{2b}\right) = P\left(Y \geq ax + \frac{b}{2}x^2\right). \end{aligned}$$

$$\text{Or, } P\left(Y \geq ax + \frac{b}{2}x^2\right) = 1 - P\left(Y < ax + \frac{b}{2}x^2\right) = 1 - F_Y\left(ax + \frac{b}{2}x^2\right).$$

Comme $\hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on a $\forall t \geq 0, F_Y(t) = 1 - \exp(-t)$.

$$\text{Donc } P(X \geq x) = 1 - \left(1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)\right) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$$

On a donc finalement $\forall x \in \mathbf{R}_+, P(X \geq x) = G_{a,b}(x)$.

4)b) Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - G_{a,b}(x).$$

$$\begin{aligned} \checkmark P(X > x) &= P(X \geq x) \text{ car } P(X = x) = P\left(Y = ax + \frac{b}{2}x^2\right) \\ &= 0 \text{ puisque } Y \text{ est à densité.} \end{aligned}$$

Pour tout $x < 0$, on a $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$ car Y ne prend que des valeurs positives donc X aussi.

$$\text{On a donc } F_X(x) = \begin{cases} 1 - G_{a,b}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

F_X est continue sur \mathbf{R}_+ (car $G_{a,b}$ l'est) et continue sur \mathbf{R}_- (fonction nulle).

De plus, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - G_{a,b}(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_X(x) = 0,$$

$$F_X(0) = 1 - G_{a,b}(0) = 0.$$

Donc F_X est continue en 0.

Ainsi, F_X est continue sur \mathbf{R} .

D'autre part, F_X est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ (car $G_{a,b}$ l'est) et de classe C^1 sur \mathbf{R}_- (fonction nulle).

Donc F_X est de classe C^1 sur \mathbf{R} , sauf peut-être en 0.

On peut donc affirmer que X est une variable aléatoire à densité dont une densité f_X est donnée par $f_X(x) = F'_X(x)$ aux points où F_X est dérivable et qu'aux points où la dérivabilité de F_X n'est pas acquise, on fait prendre à f_X une valeur arbitraire positive ou nulle.

$$\text{On peut prendre } f_X(x) = \begin{cases} -G'_{a,b}(x) = (a + bx)\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc $f_X(x) = f_{a,b}(x)$, ce qui montre que $X \hookrightarrow \mathcal{E}_l(a, b)$.

$$4)c) \text{D'après la question I)1)c), on a : } G_{a,b}^{-1}(1-U) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b \ln(1-U)}}{b}.$$

On sait par le cours que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors $-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Posons $Y = -\ln(1-U)$. On a alors $G_{a,b}^{-1}(1-U) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

D'après 4)b), on peut conclure que $G_{a,b}^{-1}(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}_l(a, b)$.

5)a)

La ligne 4 renvoie une liste de n réels aléatoires de $[0, 1]$.

Elle permet donc de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

5)b) On complète la ligne 5 par :

```
y=[-np.log(1-u[k]) for k in range(n)]
```

6) En répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, on sait que la moyenne des valeurs obtenues par une variable aléatoire se rapproche de son espérance (conséquence de la loi faible des grands nombres).

La commande `linexp(0,1,10**k)` renvoie 10^k simulations de X où $X \hookrightarrow \mathcal{E}_1(0, 1)$.

Puis, on fait la moyenne des 10^k valeurs obtenues par la fonction `mean`.

Plus k est grand, plus on se rapproche de $E(X) = \int_0^{+\infty} G_{0,1}(x) dx$.

Or, d'après I)2)c), on a : $\int_0^{+\infty} G_{0,1}(x) dx = \sqrt{2\pi}\phi(0) = \sqrt{2\pi}\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Ainsi, plus k est grand, plus on se rapproche de $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Partie II : premier décès et intervalle de confiance de a

7) Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} P(M_n \geq x) &= P(X_1 \geq x \cap \dots \cap X_n \geq x) \\ &= P(X_1 \geq x) \dots P(X_n \geq x) \text{ par indépendance} \\ &= G_{a,b}(x) \dots G_{a,b}(x) \\ &= (G_{a,b}(x))^n \\ &= \exp\left(-nax - \frac{b}{2}nx^2\right) \\ &= G_{na,nb}(x). \end{aligned}$$

Par ailleurs pour tout $x < 0$:

$$P(M_n \geq x) = P(X_1 \geq x \cap \dots \cap X_n \geq x) = P(X_1 \geq x) \dots P(X_n \geq x).$$

Avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X_i \geq x) = 1 - P(X_i < x) = 1 - \int_{-\infty}^x f_{a,b}(x) dx = 1$ car $f_{a,b}$ est nulle sur \mathbf{R}_-^* .

Donc $\forall x < 0 : P(M_n \geq x) = 1$.

$$\text{On a finalement : } F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = \begin{cases} 1 - G_{na,nb}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

M_n est continue sur \mathbf{R} et de classe C^1 sur \mathbf{R} , sauf peut-être en 0.

Donc M_n est une variable aléatoire à densité de densité f_{M_n} donnée par :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} -G'_{na,nb}(x) = (na + nbx)\exp\left(-nax - \frac{nb}{2}x^2\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc $f_{M_n}(x) = f_{na,nb}(x)$. Ainsi, $M_n \hookrightarrow \mathcal{E}_i(na, nb)$.

8)a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$P(U_n > x) = P\left(H_n > \frac{x}{n}\right) = P\left(h > \frac{x}{n} \cap M_n > \frac{x}{n}\right) = P\left(h > \frac{x}{n}\right) P\left(M_n > \frac{x}{n}\right)$$

par indépendance de la variable certaine h et de M_n .

$$\text{On a donc } P(U_n > x) = P\left(h > \frac{x}{n}\right) \left(1 - F_{M_n}\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

• si $x < 0$

$$\text{On a } P\left(h > \frac{x}{n}\right) = 1 \text{ car } h \geq 2 \text{ et } F_{M_n}\left(\frac{x}{n}\right) = 0. \text{ Donc } P(U_n > x) = 1.$$

• si $0 \leq x < nh$

$$\text{On a alors } h > \frac{x}{n} \geq 0 \text{ donc } P\left(h > \frac{x}{n}\right) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } F_{M_n}\left(\frac{x}{n}\right) &= 1 - G_{na,nb}\left(\frac{x}{n}\right) = 1 - \exp\left(-na\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{nb}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right) \\ &= 1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(U_n > x) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right).$$

• $x \geq nh$

$$\text{On a alors } h \leq \frac{x}{n} \text{ donc } P\left(h > \frac{x}{n}\right) = 0 \text{ d'où } P(U_n > x) = 0.$$

$$\text{On conclut que } F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leq x < nh \\ 1 & \text{si } x \geq nh. \end{cases}$$

8)b) F_{U_n} est continue sur \mathbf{R}_* (fonction nulle), sur $[0, nh[$ (par différence et composée de fonctions continues) et sur $[nh, +\infty[$ (fonction constante).

Elle est bien continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{U_n}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_{U_n}(x) = 0$ et

$$F_{U_n}(0) = 0.$$

En revanche, F_{U_n} n'est pas continue en nh .

$$\text{En effet, } \lim_{x \rightarrow (nh)^-} F_{U_n}(x) = 1 - \exp\left(-anh - \frac{bnh^2}{2}\right) \neq 1 = F_{U_n}(nh).$$

8)c) F_{U_n} n'est pas continue sur \mathbf{R} donc U_n n'est pas à densité.

8)d) Soit x un réel fixé.

• si $x < 0$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

• si $x \geq 0$

En prenant n suffisamment grand, on a $0 \leq x < nh$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right) \right] = 1 - \exp(-ax)$.

Soit Z une variable aléatoire telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

On a alors :
$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-ax) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{U_n}(x) = F_Z(x)$, ce qui montre que U_n converge en loi vers Z .

9)a) Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on a :
$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(c \leq Y \leq d) = 1 - \alpha \\ P(Y \leq c) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_Y(d) - F_Y(c) = 1 - \alpha \\ F_Y(c) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exp(-c) - \exp(-d) = 1 - \alpha \\ 1 - \exp(-c) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exp(-c) - \exp(-d) = 1 - \alpha \\ c = -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ c = -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

Et on vérifie que $c > 0$ et $d > 0$ du fait que $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned}
9)b) & \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{c}{U_n} \leq a \leq \frac{d}{U_n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{c}{a} \leq U_n \leq \frac{d}{a}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(F_{U_n}\left(\frac{d}{a}\right) - F_{U_n}\left(\frac{c}{a}\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-a \times \frac{d}{a}\right) - \left(1 - \exp\left(-a \times \frac{c}{a}\right)\right) \text{ d'après 8)d)} \\
&= 1 - \exp(-d) - (1 - \exp(-c)) \\
&= F_Y(d) - F_Y(c) \\
&= P(c \leq Y \leq d) \\
&= 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

Donc $\left[\frac{c}{U_n}, \frac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de α au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Partie III :

10)a) Comme S_i suit une loi de Bernoulli, on a :

$$E(S_i) = P(S_i = 1) = P(X_i \geq h) = G_{a,b}(h).$$

En outre, comme S_i et D_i suivent une loi de Bernoulli, $S_i D_i$ aussi.

$$\text{On a donc } E(S_i D_i) = P(S_i D_i = 1) = P(S_i = 1 \cap D_i = 1)$$

$$= P(X_i \geq h \cap X_i \geq 1) = 0 \text{ car } h \geq 2.$$

10)b) • si $i = j$

$$E(S_i D_i) = 0 \text{ mais } E(S_i)E(D_i) = P(X_i \geq h)P(X_i \leq 1) \neq 0.$$

Donc $E(S_i D_i) \neq E(S_i)E(D_i)$. Donc S_i et D_i ne sont pas indépendantes.

• si $i \neq j$

$$P(S_i = 1 \cap D_j = 1)$$

$$= P(X_i \geq h \cap X_j \leq 1)$$

$$= P(X_i \geq h)P(X_j \leq 1) \text{ car } X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$

$$= P(S_i = 1)P(D_j = 1).$$

Par passage au complémentaire, on a ensuite $P(S_i = x \cap D_j = y)$

$$= P(S_i = x)P(D_j = y) \text{ pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } \{0; 1\}.$$

Donc S_i et D_j sont indépendantes.

$$10)c) \text{ Par bilinéarité, on a } cov(\overline{S_n}, \overline{D_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n cov(S_i, D_j).$$

Si $i \neq j$, on a $cov(S_i, D_j) = 0$ car S_i et D_j sont indépendantes.

Donc $\text{cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{cov}(S_i, D_i)$.

Or, $\text{cov}(S_i, D_i) = E(S_i D_i) - E(S_i)E(D_i) = 0 - G_{a,b}(h)(1 - G_{a,b}(1))$.

On déduit que $\text{cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n) = -\frac{G_{a,b}(h)(1 - G_{a,b}(1))}{n}$

On a $\text{cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n) < 0$. Ce résultat était prévisible, en effet :

\overline{S}_n représente la proportion de survivants après h années d'étude, alors que \overline{D}_n représente la proportion d'individus décédés la première année d'étude. Quand \overline{S}_n augmente, \overline{D}_n diminue.

$$\begin{aligned} 11)\text{a)} \text{ On a par linéarité : } E(\overline{S}_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(S_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(X_i \geq h) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_{a,b}(h) = G_{a,b}(h). \end{aligned}$$

Donc \overline{S}_n est un estimateur sans biais de $G_{a,b}(h)$.

En outre, on a $V(\overline{S}_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(S_i)$ par indépendance

de S_1, \dots, S_n (dûe à l'indépendance de X_1, \dots, X_n).

Les X_i ont la même loi donc les S_i ont la même loi et donc la même variance.

On déduit que $V(\overline{S}_n) = \frac{V(S_1)}{n}$.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} r(\overline{S}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(\overline{S}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(S_1)}{n} = 0.$$

Donc \overline{S}_n est un estimateur convergent de $G_{a,b}(h)$.

11)b) On prouve de la même façon que \overline{D}_n est un estimateur sans biais et convergent de $1 - G_{a,b}(1)$.

12)a)i) On a :

$$\begin{aligned} & |(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \\ &= |\lambda(Z_n - z(a, b)) - \mu(R_n - r(a, b))| \\ &\leq |\lambda(Z_n - z(a, b))| + |\mu(R_n - r(a, b))| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ &= |\lambda||Z_n - z(a, b)| + |\mu||R_n - r(a, b)| \\ &= \lambda|Z_n - z(a, b)| + \mu|R_n - r(a, b)| \text{ car } \lambda > 0 \text{ et } \mu > 0. \end{aligned}$$

Si $|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geq \epsilon$, on déduit par recollement d'inégalités que $\lambda|Z_n - z(a, b)| + \mu|R_n - r(a, b)| \geq \epsilon$, ce qui montre l'inclusion des événements.

12)a)ii) De l'inclusion précédente, on tire :

$$\begin{aligned}
& P [|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a, b) - \mu r(a, b))| \geq \epsilon] \\
& \leq P [\lambda |Z_n - z(a, b)| + \mu |R_n - r(a, b)| \geq \epsilon] \\
& \leq P \left[\lambda |Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\epsilon}{2} \cup \mu |R_n - r(a, b)| \geq \frac{\epsilon}{2} \right] \quad (*) \\
& \leq P \left[\lambda |Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\epsilon}{2} \right] + P \left[\mu |R_n - r(a, b)| \geq \frac{\epsilon}{2} \right] \quad (\text{crible}) \\
& = P \left[|Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\epsilon}{2\lambda} \right] + P \left[|R_n - r(a, b)| \geq \frac{\epsilon}{2\mu} \right].
\end{aligned}$$

(*) car si $x + y \geq \epsilon$, alors $x \geq \frac{\epsilon}{2}$ ou $y \geq \frac{\epsilon}{2}$

12)b) Soit $\epsilon > 0$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|B_n - b| \geq \epsilon) = 0$.

En appliquant 12)a)ii) avec $\lambda = \frac{2}{h-1}$ et $\mu = \frac{2}{h(h-1)}$, on a :

$$\begin{aligned}
& \lambda z(a, b) - \mu r(a, b) \\
& = \frac{2}{h-1} \ln(G_{a,b}(1)) - \frac{2}{h(h-1)} \ln(G_{a,b}(h)) \\
& = \frac{2}{h-1} \left(-a - \frac{b}{2} \right) - \frac{2}{h(h-1)} \left(-ah - \frac{b}{2}h^2 \right) \\
& = b.
\end{aligned}$$

La question 12)a)ii) donne alors :

$$P(|B_n - b| \geq \epsilon) \leq P \left[|Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\epsilon(h-1)}{4} \right] + P \left[|R_n - r(a, b)| \geq \frac{\epsilon h(h-1)}{4} \right].$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left[|Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\epsilon(h-1)}{4} \right] = 0$ car Z_n est un estimateur convergent de $z(a, b)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left[|R_n - r(a, b)| \geq \frac{\epsilon h(h-1)}{4} \right] = 0$ car R_n est un estimateur convergent de $r(a, b)$.

Par somme, on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left[|Z_n - z(a, b)| \geq \frac{\epsilon(h-1)}{4} \right] + P \left[|R_n - r(a, b)| \geq \frac{\epsilon h(h-1)}{4} \right] = 0.$$

Puis, par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|B_n - b| \geq \epsilon) = 0$.

Ainsi, B_n est un estimateur convergent de b .