Correction concours blanc ECRICOME

Exercice 1 (ecricome 2009)

I)1)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$M(a,b,c) = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_3}.$$

Donc $E = \text{Vect}\,(U_1, U_2, U_3)$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

2)(U_1, U_2, U_3) est une famille génératrice de E.

De plus, pour tous réels a, b et c, on a :

$$aU_1 + bU_2 + cU_3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc (U_1, U_2, U_3) est libre.

C'est une famille libre et génératrice de E donc une base de E. Et $dimE = 3$.

II)1)$M(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est tringulaire.

Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 1, 2 et 3.

2)Il faut chercher les sous-espaces propres de $M(1,2,3)$.

Pour les calculs ci-dessous, on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• $E_1\,(M(1,2,3)) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid\ (M(1,2,3) - I)\,U = 0\}$.

$$(M(1,2,3) - I)\,U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow y = z = 0$.

$$\text{Donc } E_1\,(M(1,2,3)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

• $E_2\,(M(1,2,3)) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid\ (M(1,2,3) - 2I)\,U = 0\}$.

$$(M(1,2,3) - 2I)\,U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow z = 0$ et $x = y$.

$$\text{Donc } E_2\,(M(1,2,3)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = 0 \text{ et } x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

• $E_3\,(M(1,2,3)) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid\ (M(1,2,3) - 3I)\,U = 0\}$.

$$(M(1,2,3) - 3I)\,U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

$\iff y = 2z$ et $x = \frac{3}{2}z$.

$E_3\left(M(1,2,3)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 2z \text{ et } x = \frac{3}{2}z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ou encore : $E_3\left(M(1,2,3)\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

$M(1,2,3) \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres, elle est donc diagonalisable.
On peut donc l'écrire sous la forme réduite : $M(1,2,3) = PDP^{-1}$ où :
– D est diagonale portant sur sa diagonale les valeurs propres de $M(1,2,3)$,
– P est inversible, ses colonnes formées des bases des sous-espaces propres de $M(1,2,3)$.

On peut prendre $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Enfin, l'égalité $M(1,2,3) = PDP^{-1}$ s'écrit aussi $D = P^{-1}M(1,2,3)P$.

3)On détermine P^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 1/2L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/2L_3 \end{matrix}.$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

De l'égalité $M(1,2,3) = PDP^{-1}$, on déduit par récurrence très classique :

$(M(1,2,3))^n$

$= PD^nP^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^{n+1} \\ 0 & 2^n & 4 \times 3^n \\ 0 & 0 & 2 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2} \times 3^{n+1} \\ 0 & 2^n & 2 \times 3^n - 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

III)1)$J = M(1,1,1) - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \geq 3$, on déduit : $J^n = J^3 J^{n-3} = 0 J^{n-3} = 0$.

2)A partir de l'égalité $M(1,1,1) = J + I_3$, on peut appliquer la formule du binôme car J et I_3 commutent, ce qui donne pour tout entier $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
(M(1,1,1))^n &= (J + I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} J^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} J^k \\
&= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} J^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} J^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} J^2 + \sum_{k=3}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \underbrace{J^k}_{=0} \\
&= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit : $(M(1,1,1))^0 = I_3$, ce qui est vrai.

Et pour $n = 1$: $(M(1,1,1))^1 = I_3 + J$, ce qui est vrai aussi.

> Remarque
> $M(1,1,1)^2 = (I_3 + J)^2 = I_3 + 2J + J^2$. Donc l'égalité demandée est encore vraie pour $n = 2$.

3)On déduit :

$$\begin{aligned}
(M(1,1,1))^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

IV)1)Pour tous réels x, y et z, on a :

$$\begin{aligned}
xu + yv + zw = 0 &\iff x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(2,1,1) = (0,0,0) \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \\
&\iff x = y = z = 0.
\end{aligned}$$

Donc la famille (u, v, w) est libre. C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ de cardinal 3. Ce cardinal coincide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$. Donc (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

2)Le vecteur colonne de $f(u)$ dans la base canonique vaut :

$M(1,1,2)U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $f(u) = (1,0,0) = u$.

Le vecteur colonne de $f(w)$ dans la base canonique vaut :

$M(1,1,2)W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $f(w) = (4,2,2) = 2w$.

3)Le vecteur colonne de $f(v)$ dans la base canonique vaut :

$M(1,1,2)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $f(v) = (1,1,0) = u + v$.

On déduit des calculs précédents :

$$T = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4)Raisonnement par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $T^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$ », soit $T^0 = I_3$, c'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{par HR} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

5)La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{C}$ est : $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, $QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Donc $R^{-1} = Q$.

6)La formule de changement de base pour les endomorphismes donne :

$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f) \left(P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\right)^{-1}$, c'est-à-dire : $M(1,1,2) = RTQ$.

7)Une récurrence classique donne : $\forall n \in \mathbf{N},\ (M(1,1,2))^n = RT^nQ$.

Exercice 2 (ecricome 2010)

Partie I :

1)Quand $x \to 0^+$, on écrit : $\varphi(x) = \dfrac{x\ln x + 1}{x} - \ln(x+1)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x + 1) = 1$.

Par inverse, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x + 1}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1} \ln t = 0$. Par composée, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale à $\mathscr{C}_\varphi$.

2)Quand $x \to +\infty$, on écrit : $\varphi(x) = -\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} = -\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1} \ln t = 0$. Par composée, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}_\varphi$.

3)φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme, inverse et composée de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = -\dfrac{1}{x^2(x+1)} < 0$.

Donc φ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

4)Tableau de variations de φ :

x	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0

5)φ est continue (car dérivable) sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi\big(]0, +\infty[\big) =]0, +\infty[$.

$1 \in]0, +\infty[$ admet donc un unique antécédent α par φ, ce qui signifie que l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution α.

$\varphi\left(\dfrac{1}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) - \ln\left(\dfrac{4}{3}\right) + 3 = -\ln 3 - (\ln 4 - \ln 3) + 3 = 3 - 2\ln 2 > 1$.

$\varphi(\alpha) = 1$

$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + 2 = -\ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) + 2 = 2 - \ln 3 < 1$.

Donc $\varphi\left(\dfrac{1}{3}\right) > \varphi(\alpha) > \varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

D'où $\dfrac{1}{3} < \alpha < \dfrac{1}{2}$ par stricte décroissance de φ.

6)Programme Python

```
import numpy as np
def f(x):
    y=np.log(x)-np.log(x+1)+1/x
    return y
a=1/3
b=1/2
while b-a>10**-2:
    c=(a+b)/2
    if f(c)<0:
        b=c
    if f(c)>0:
        a=c
print(c)
```

Python retourne $\alpha \approx 0,495$

Partie II :

1)f est continue sur $]-\infty, \alpha]$ comme fonction nulle et continue sur $]\alpha, +\infty[$ comme inverse de fonction continue. Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en α.

$\forall x \leq \alpha,\ f(x) = 0$ et $\forall x > \alpha,\ f(x) > 0$ car $\alpha > 0$. Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq 0$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $]-\infty, \alpha]$.

Pour tout réel $A > \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{A} f(x)dx &= \int_{\alpha}^{A} \frac{1}{x^2(x+1)}dx \\ &= \int_{\alpha}^{A} -\varphi'(x)dx \\ &= -\left[\varphi(x)\right]_{\alpha}^{A} \\ &= -\varphi(A) + \varphi(\alpha) \\ &= -\varphi(A) + 1.\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_{\alpha}^{A} f(x)dx = 1$.

Donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Par Chasles, on conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Ainsi, f est une densité de probabilité.

2)X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} |xf(x)|dx$ converge (et vaut 0) car f est nulle sur $]-\infty, \alpha]$.

$\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} |xf(x)|dx = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx.$

$\dfrac{1}{x(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge (Riemann de paramètre $2>1$).

D'après le critère d'équivalence pour des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge. Donc X admet une espérance.

3)Pour tout $x>\alpha$, on a :

$\varphi'(x)+\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2(x+1)}+\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-1+(x+1)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x}{x^2(x+1)} = xf(x).$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\alpha} xf(x)dx + \int_\alpha^{+\infty} xf(x)dx \\
&= 0 + \int_\alpha^{+\infty} \left(\varphi'(x)+\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} \int_\alpha^{A} \left(\varphi'(x)+\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left[\varphi(x)-\frac{1}{x}\right]_\alpha^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left[\varphi(A)-\frac{1}{A}-\varphi(\alpha)+\frac{1}{\alpha}\right] \\
&= -\varphi(\alpha)+\frac{1}{\alpha} \\
&= -1+\frac{1}{\alpha} \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

De l'encadrement $\dfrac{1}{3}<\alpha<\dfrac{1}{2}$, on tire :

$-\dfrac{1}{3} > -\alpha > -\dfrac{1}{2}$, puis $1-\dfrac{1}{3} > 1-\alpha > 1-\dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{1}{2} < 1-\alpha < \dfrac{2}{3}$ $\quad(*)$

De plus, par inverse : $3 > \dfrac{1}{\alpha} > 2$, soit $2 < \dfrac{1}{\alpha} < 3$ $\quad(**)$

En multipliant membre à membre $(*)$ et $(**)$: $\dfrac{1}{2}\times 2 < \dfrac{1-\alpha}{\alpha} < \dfrac{2}{3}\times 3$.

Ainsi, $1<E(X)<2$.

4)Pour tout $x>\alpha$, on a : $|x^2f(x)| = \dfrac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

$\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge (Riemann de paramètre 1).

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} |x^2f(x)|dx$ diverge. Donc X^2 n'admet pas d'espérance.

Donc X n'admet pas de variance (Koenig).

Exercice 3 (ecricome 2008)

Partie I : premier jeu

a)L'expérience aléatoire est constituée de N épreuves successives, identiques et indépendantes.
A chaque épreuve, la probabilité de succès est $1/10$.
X_N compte le nombre de succès. Donc $X_N \hookrightarrow \mathscr{B}(N, 1/10)$.
Le cours donne : $E(X_N) = \dfrac{N}{10}$ et $V(X_N) = N \times \dfrac{1}{10} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{9N}{100}$.
b)Les X_N gagnées apportent un gain de $3X_N$ euros auquel il faut retirer N euros de mise. Donc $Y_N = 3X_N - N$.
Par linéarité, on a : $E(Y_N) = 3E(X_N) - N = 3 \times \dfrac{N}{10} - N = -\dfrac{7N}{10}$.
$V(Y_N) = 3^2 V(X_N) = \dfrac{81N}{100}$.
c)i. $X_{60} \hookrightarrow \mathscr{B}(60, 1/10)$. D'après le cours, on peut approcher la loi de X_{60} par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 60 \times \dfrac{1}{10} = 6$.
ii.La probabilité demandée est :

$$\begin{aligned}
P(Y_{60} > -50) &= P(3X_{60} - 60 > -50) \\
&= P\left(X_{60} > \frac{10}{3}\right) \\
&= 1 - P\left(X_{60} \leq \frac{10}{3}\right) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{3} P(X_{60} = i)
\end{aligned}$$

En approchant la loi de X_{60} par la loi de Poisson $\mathscr{P}(6)$, on obtient par l'annexe :
$\displaystyle\sum_{i=0}^{3} P(X_{60} = i) \approx 0,1512$. Donc $P(Y_{60} > -50) \approx 0,8488$

Partie II : deuxième jeu

a)• f est continue sur $[0,1]$ car polynomiale et continue sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction nulle. Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0 et 1.
$\forall x \in [0,1],\ f(x) = 2x \geq 0$ et $\forall x \notin [0,1],\ f(x) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq 0$.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ convergent et valent 0.
De plus, $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx$ converge car f est continue sur $[0,1]$.
Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} 2xdx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$.
On conclut que f est une densité de probabilité.

• Par définition, $\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. On distingue 3 cas :

Premier cas : $x < 0$

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$

Deuxième cas : $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2tdt \\ &= 0 + \left[t^2\right]_0^x = x^2. \end{aligned}$$

Troisième cas : $x > 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 2tdt + \int_{1}^{x} 0dt \\ &= 0 + \left[t^2\right]_0^1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b)X_i admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge.

f étant nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, on se ramène à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx = \int_0^1 2x^2dx.$

Cette intégrale converge puisque $x \mapsto 2x^2$ est continue sur $[0,1]$.

Donc X_i admet une espérance donnée par :

$E(X_i) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

c)Pour tout t réel, on a : $(M > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap (X_3 > t)$.

d)Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} F_M(x) &= P(M \leq x) \\ &= 1 - P(M > x) \\ &= 1 - P\left((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap (X_3 > x)\right) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)P(X_3 > x) \quad \text{par indépendance de } X_1, X_2, X_3 \\ &= 1 - \left(1 - P(X_1 \leq x)\right)\left(1 - P(X_2 \leq x)\right)\left(1 - P(X_3 \leq x)\right) \\ &= 1 - \left(1 - F(x)\right)^3. \end{aligned}$$

F est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0 et 1, comme fonction de répartition de la variable aléatoire à densité X_i.
Il en est de même pour F_M par différence et puissance.
Donc M est une variable aléatoire à densité. Une densité de M s'obtient en dérivant F_M aux points où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire positive aux autres points (0 et 1).

Donc $\forall x \neq \{0,1\}\,,\ f_M(x) = F'_M(x) = 3F'(x)\big(1-F(x)\big)^2$.
On obtient alors, compte tenu de l'expression de F trouvée en a) :

$$f_M(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6x\big(1-x^2\big)^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$$

En 0 et en 1, on peut prendre $f_M(0) = f_M(1)$, ce qui permet de recoller aux formules :

Ainsi, $f_M(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6x\big(1-x^2\big)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$

e)Le joueur gagne si au moins l'une des fléchettes arrive à une distance inférieure à 1/5 du centre, ce qui se produit si et seulement si la flèche la plus proche arrive à une distance inférieure à 1/5 du centre.

Ainsi, $P(G) = P\left(M < \dfrac{1}{5}\right) = F_M\left(\dfrac{1}{5}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\dfrac{1}{5}\right)\right)^3 = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{25}\right)^3$.

Donc $P(G) = 1 - \left(\dfrac{24}{25}\right)^3$.

Partie III : troisième jeu

a)Distinguons 2 cas :
• $n \leq N$
Les n boules peuvent être lancées dans la même case, auquel cas, $T_n = 1$.
Elles peuvent aussi êtres lancées dans n cases différentes, auquel cas $T_n = n$.
Il y aussi toutes les possibilités intermédiaires. Donc $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
• $n > N$
C'est la même idée, mais comme il y a moins de cases que de boules, T_n ne peut pas dépasser N. Donc $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
En conclusion, $T_n(\Omega) = [\![1, min(n, N)]\!]$.
b)• loi de T_1
$T_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(T_1 = 1) = 1$ donc T_1 suit une loi certaine.
• loi de T_2
$T_1(\Omega) = \{1, 2\}$.
Réaliser l'expérience consiste à construire une application de l'ensemble E des boules dans l'ensemble F des cases. Il y a N^2 applications possibles.
Parmi ces applications, on cherche celles qui sont injectives (les 2 boules n'étant pas lancées dans la même case). Il y en a $N(N-1)$.
En effet, la première boule a N choix de case. Etant lancée, la deuxième boule n'a plus que $N-1$ choix de case.

Donc $P(T_2 = 2) = \dfrac{N(N-1)}{N^2} = \dfrac{N-1}{N}$. Puis, $P(T_2 = 1) = 1 - P(T_2 = 2) = \dfrac{1}{N}$.

c)Soit $n \geq 2$. On reprend le modèle fait au-dessus.
Il y a N^n applications de l'ensemble E des boules dans l'ensemble F des cases. Il reste à dénombrer les cas favorables.

(i) calcul de $P(T_n = 1)$
Il y a N applications où les boules ont la même image, (les boules sont toutes lancées dans la même case).
Donc $P(T_n = 1) = \dfrac{N}{N^n} = \dfrac{1}{N^{n-1}}$.

(ii) calcul de $P(T_n = 2)$
On choisit les 2 cases parmi N où vont arriver les boules , il y a $\binom{N}{2}$ choix.
Puis on construit une application surjective de E dans l'ensemble des 2 cases choisies (surjective car aucune des 2 cases ne doit être vide). Il y a $2^n - 2$ choix (puisqu'il faut retirer aux 2^n applications possibles les deux qui envoient les n boules dans la même case).
Donc $P(T_n = 2) = \dfrac{\binom{N}{2}(2^n - 2)}{N^n}$.

(iii) calcul de $P(T_n = n)$
On distingue deux cas :
• $n > N$
On a $P(T_n = n) = 0$ puisqu'on ne peut pas remplir n cases si le nombre N de cases disponibles est inférieur à n.
• $n \leq N$
On commence par choisir les n cases où vont arriver les boules, il y a $\binom{N}{n}$ choix.
Puis on construit une application bijective de E dans l'ensemble des n cases choisies, il y a $n!$ choix.
Donc $P(T_n = n) = \dfrac{\binom{N}{n} n!}{N^n}$.

d)Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.

Pour qu'après $n+1$ lancers, k cases soient remplies, il est nécessaire et suffisant qu'après les n premiers lancers, k ou $k-1$ cases soient remplies.

Mathématiquement, cela signifie en terme d'événements que :

$$(T_{n+1} = k) = \big((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k)\big) \cup \big((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k-1)\big).$$

On déduit par incompatibilité :
$P(T_{n+1} = k) = P\big((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k)\big) + P\big((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k-1)\big)$.
$= P_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) P(T_n = k) + P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) P(T_n = k-1) \quad (*)$
Il reste à calculer les probabilités conditionnelles.

$P_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}$ car si au bout de n lancers, k cases sont atteintes, il faut que le $n+1$-ème lancer atteigne l'une des k cases déjà remplies parmi les N possibles, si l'on veut réaliser l'événement $(T_{n+1} = k)$.

De même, $P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) = \dfrac{N-(k-1)}{N} = \dfrac{N-k+1}{N}$ car si au bout de n lancers, $k-1$ cases sont atteintes, il faut que le $n+1$-ème lancer atteigne l'une des $N-(k-1)$ cases non encore remplies parmi les N possibles, si l'on veut réaliser l'événement $(T_{n+1} = k)$.

En remplaçant dans $(*)$, on déduit :

$$P\left(T_{n+1}=k\right)=\frac{k}{N}P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1) \quad (I)$$

e)On pose $\forall x\in\mathbf{R},\ G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)x^k$.

i)$Gn(1)=\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)=1$ puisque $T_n(\Omega)\subset [\![1,n]\!]$.

ii)Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a :

$G'_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)x^k\right)'=\sum_{k=1}^{n}\left(P(T_n=k)x^k\right)'=\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)kx^{k-1}$.

Donc $G'_n(1)=\sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)=E(T_n)$.

iii)Soit $x\in\mathbf{R}$. En multipliant les membres de (I) par x^k, on obtient :

$P\left(T_{n+1}=k\right)x^k=\frac{k}{N}P(T_n=k)x^k+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)x^k$.

Puis, par sommation et linéarité de la somme :

$\sum_{k=1}^{n+1}P\left(T_{n+1}=k\right)x^k=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{N}P(T_n=k)x^k+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)x^k$.

C'est-à-dire :

$G_{n+1}(x)=\frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n+1}kP(T_n=k)x^{k-1}+\sum_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{k-1}{N}\right)P(T_n=k-1)x^k$.

Dans la somme de gauche, le terme d'indice $n+1$ est nul car $P(T_n=n+1)=0$. Dans la somme de droite, on développe et on sépare la somme en deux par linéarité.

$G_{n+1}(x)=\frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)x^{k-1}+\sum_{k=1}^{n+1}P(T_n=k-1)x^k-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)P(T_n=k-1)x^k$

Dans le membre de droite, on reconnait la dérivée de G_n. Dans les autres sommes, on pose $j=k-1$.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x)&=\frac{x}{N}G'_n(x)+\sum_{j=0}^{n}P(T_n=j)x^{j+1}-\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n}jP(T_n=j)x^{j+1}\\
&=\frac{x}{N}G'_n(x)+x\sum_{j=0}^{n}P(T_n=j)x^{j}-\frac{x^2}{N}\sum_{j=0}^{n}jP(T_n=j)x^{j-1}\\
&=\frac{x}{N}G'_n(x)+x\sum_{j=1}^{n}P(T_n=j)x^{j}-\frac{x^2}{N}\sum_{j=1}^{n}jP(T_n=j)x^{j-1}\\
&=\frac{x}{N}G'_n(x)+xG_n(x)-\frac{x^2}{N}G'_n(x)\\
&=\frac{1}{N}(x-x^2)G'_n(x)+xG_n(x).
\end{aligned}$$

iv)En dérivant l'égalité précédente, on obtient pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$G'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}\big((1-2x)G'_n(x) + (x-x^2)G''_n(x)\big) + \big(G_n(x) + xG'_n(x)\big)$

Puis, en évaluant pour $x = 1$:

$G'_{n+1}(1) = -\dfrac{1}{N}G'_n(1) + G_n(1) + G'_n(1) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)G'_n(1) + G_n(1).$

C'est-à-dire, compte tenu des questions e)i.ii :

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1 \qquad (1)$$

v)La suite $\big(E(T_n)\big)_{n\geq 1}$ est arithmético-géométrique.

On introduit le réel x tel que $x = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)x + 1 \qquad (2)$

On obtient $x = N$.

Par différence des lignes (1) et (2), on déduit :

$E(T_{n+1}) - x = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\big(E(T_n) - x\big).$

Soit, $E(T_{n+1}) - N = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\big(E(T_n) - N\big).$

La suite $\big(E(T_n) - N\big)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison $1 - \dfrac{1}{N}$.

Donc $\forall n \geq 1,\ E(T_n) - N = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\big(E(T_1) - N\big).$

T_1 est certaine et égale à 1 donc $E(T_1) = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= N + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\big(1 - N\big) \\ &= N - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} N\left(1 - \frac{1}{N}\right) \\ &= N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n}\right). \end{aligned}$$

Remarque
On pouvait aussi faire une récurrence.