Exercice 1 (eml 2017)

Partie I

1)a)f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est la différence de fonctions deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$.

$\forall x>0,\ f'(x)=e^x-\dfrac{e}{x}$ et $f''(x)=e^x+\dfrac{e}{x^2}$.

1)b)$\forall x>0,\ f''(x)>0$ donc f' est croissante sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=+\infty$.

Enfin, on a $f'(1)=0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

2)$\forall x\in\,]0,1]\,,\ f'(x)\le 0$ et $\forall x\ge 1,\ f'(x)\ge 0$ donc f est décroissante sur $]0,1]$, puis croissante sur $[1,+\infty]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Quand $x\to+\infty$, on a une forme indéterminée.

Or, $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ et $x\underset{+\infty}{=} o(e^x)$ donc $\ln x\underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

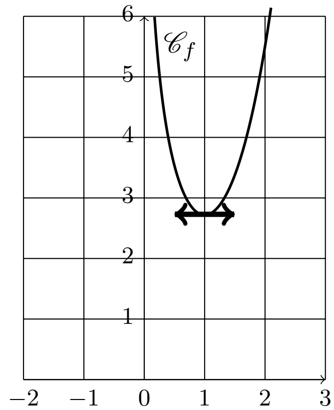
Cela entraîne que $e\ln x\underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

Donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim} e^x$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$ $+\infty$

3)Courbe de f



4)a)u est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$\forall x>0,\ u'(x)=f''(x)-1=e^x+\dfrac{e}{x^2}-1.$

$\forall x>0,\ e^x>1$ donc $e^x-1>0$. En outre, $\dfrac{e}{x^2}>0$.

Par somme, $u'(x)>0$.

Ainsi, u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4)b)• $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$.

• Quand $x\to+\infty$, écrivons : $u(x)=e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)-\dfrac{e}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}=0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)=1$,

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)=+\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e}{x}=0$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$.

• u est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $u\big(\big]0,+\infty\big[\big)=\mathbf{R}$.

0 admet donc un unique antécédent $\alpha\in\,]0,+\infty[$ par u, ce qui montre que l'équation $u(x)=0$, c'est-à-dire $f'(x)=x$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

Enfin, on a $u(1)=f'(1)-1=-1<0$ et $u(2)=f'(2)-2=e^2-\dfrac{e}{2}-2>0$.
Par ailleurs, $u(\alpha)=0$ donc $u(1)<u(\alpha)<u(2)$.
Comme u est strictement croissante sur $]1,2[$, on déduit que $1<\alpha<2$.

Partie II

5)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « u_n existe et $u_n \leq 2$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « u_0 existe et $u_0 \leq 2$ », ce qui est vrai car par énoncé, u_0 existe et vaut 2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 2$ donc $u_n \in D_f$, ce qui montre l'existence de $f(u_n)$, c'est-à-dire de u_{n+1}.

De plus, par croissance de f sur $[2, +\infty[$, l'inégalité $u_n \geq 2$ donne :
$f(u_n) \geq f(2)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq e^2 - e \ln 2$.

Or, $7,3 < e^2 < 7,4$ et $2,7 \times 0,6 < e \ln 2 < 2,8 \times 0,7$.
Donc $7,3 - 2,8 \times 0,7 < e^2 - e \ln 2 < 7,4 - 2,7 \times 0,6$, c'est-à-dire :
$5,34 < e^2 - e \ln 2 < 5,78$.

Ainsi, $u_{n+1} \geq 2$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

6)a)g est deux fois dérivable sur $[2, +\infty[$ comme différence de fonctions deux fois dérivables.

$\forall x \geq 2,\ g'(x) = f'(x) - 1$, puis $g''(x) = f''(x) > 0$.

Donc g' est croissante sur $[2, +\infty[$.

Or, $g'(2) = f'(2) - 1 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 1 > 0$.

Donc $\forall x \geq 2,\ g'(x) > 0$. Ainsi, g est croissante sur $[2, +\infty[$.

Enfin, $g(2) = f(2) - 2 = e^2 - e \ln 2 - 2 > 0$, comme montré dans l'hérédité de la récurrence II)5).

Donc $\forall x \geq 2,\ g(x) > 0$.

b)On a vu que $\forall n \geq 2,\ u_n \geq 2$. Il est donc valide de remplacer dans l'inégalité précédente x par u_n, ce qui donne :

$\forall n \in \mathbf{N},\ g(u_n) > 0$, puis $f(u_n) - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

7)Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante, elle admet une limite quand $n \to +\infty$.
Cette limite peut être finie ou valoir $+\infty$.

Supposons que cette limite soit finie. Posons $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Par passage à la limite dans l'inégalité de la question II)5), on a : $L \geq 2$.
f est continue sur $]0, +\infty[$ donc en L.
D'après le théorème du point fixe, L est solution sur $[2, +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $g(x) = 0$.
Ce qui contredit le fait que $\forall x \geq 2,\ g(x) > 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

8)programme :

```
def suite(A):
    u=2
    n=0
    while u<A:
        n=n+1
        u=np.exp(u)-np.exp(1)*np.log(u)
    return(n)
```

9)a)• Pour tout $x \geq 2$, posons $h(x) = 2\ln x - x$.

h est dérivable sur $[2, +\infty[$ et $\forall x \geq 2,\ h'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x} \leq 0$.
Donc h est décroissante sur $[2, +\infty[$.
On a donc $\forall x \geq 2,\ h(x) \leq h(2)$ où $h(2) = 2\ln 2 - 2 \approx 2 \times 0,7 - 2 \approx -0,6$.
Donc $\forall x \geq 2,\ h(x) \leq 0$, c'est-à-dire $\forall x \geq 2,\ 2\ln x \leq x$.

• Pour tout $x \geq 2$, posons $i(x) = x - \dfrac{e^x}{3}$.

i est dérivable sur $[2, +\infty[$ et $\forall x \geq 2,\ i'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{3} = \dfrac{3 - e^x}{3}$.

$\forall x \geq 2,\ e^x \geq e^2$ donc $\forall x \geq 2,\ i'(x) \leq \dfrac{3-e^2}{3} \leq 0$.
Donc i est décroissante sur $[2, +\infty[$.

On a donc $\forall x \geq 2,\ i(x) \leq i(2)$ où $i(2) = 2 - \dfrac{e^2}{3}$.

Or, $e^2 \geq 7,3$ donc $i(2) \leq 2 - \dfrac{7,3}{3} \leq 0$.

Donc $\forall x \geq 2,\ i(x) \leq 0$, c'est-à-dire $\forall x \geq 2,\ x \leq \dfrac{e^x}{3}$.

• Ainsi, $\forall x \geq 2,\ 2\ln x \leq x \leq \dfrac{e^x}{3}$.

b)Comme $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq 2$, on peut utiliser les inégalités précédentes avec $x = u_n$, ce qui donne :

$\forall n \in \mathbf{N},\ 2\ln u_n \leq u_n \leq \dfrac{e^{u_n}}{3}$.
On déduit $\forall n \in \mathbf{N},\ e^{u_n} \geq 3u_n \quad (1)$

Et $e\ln u_n \leq \dfrac{e}{2}u_n$, puis $-e\ln u_n \geq -\dfrac{e}{2}u_n \quad (2)$

En ajoutant (1) et (2), on a : $e^{u_n} - e\ln u_n \geq 3u_n - \dfrac{e}{2}u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geq \dfrac{6-e}{2}u_n$.

c)On vient de voir que $\forall k \in \mathbf{N},\ u_{k+1} \geq \dfrac{6-e}{2}u_k$.

En multipliant membre à membre ces inégalités (dont les membres sont positifs) pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} u_{k+1} \geq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{6-e}{2} u_k$, c'est-à-dire :

$$u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n \geq \left(\frac{6-e}{2}\right)^n \times u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$$

Les facteurs se télescopent membre à membre et puisque $u_0 = 2$, on a :

$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq 2\left(\frac{6-e}{2}\right)^n$.

Par inverse, on a $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{6-e}\right)^n$ converge comme série géométrique de paramètre $\dfrac{2}{6-e} \in]-1, 1[$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6-e}\right)^n$ a même nature que la série précédente, elle est donc convergente.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge.

Partie III

10) $f : x \mapsto e^x - e\ln x$ est continue sur $]0, 1]$, mais non continue en 0 car non définie en 0.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ est donc impropre en 0.

Pour tout $A \in]0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_A^1 f(x)dx &= \int_A^1 (e^x - e\ln x)\,dx \\ &= \left[e^x - e(x\ln x - x)\right]_A^1 \\ &= 2e - e^A + e(A\ln A - A).\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A\to 0^+} A\ln A = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} e^A = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \int_A^1 f(x)dx = 2e - 1$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge et $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 2e - 1$.

11)Le même calcul pour $A \geq 1$ donne :

$$\begin{aligned}\int_1^A f(x)dx &= \left[e^x - e(x\ln x - x)\right]_1^A \\ &= e^A - e(A\ln A - A) - 2e \\ &= A^2\left(\frac{e^A}{A^2} - e\frac{\ln A}{A} + \frac{e}{A} - \frac{2e}{A^2}\right)\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{e^A}{A^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\ln A}{A} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{e}{A} = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{2e}{A^2} = 0$.

Par somme, $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(\frac{e^A}{A^2} - e\frac{\ln A}{A} + \frac{e}{A} - \frac{2e}{A^2}\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} A^2 = +\infty$,

Par produit, $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx = +\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

12)$\forall x > 0$, $\frac{f(x)}{e^x} = \frac{e^x - e\ln x}{e^x} = 1 - e \times \frac{\ln x}{e^x} = 1 - e \times \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1$, ce qui montre que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

Donc $\frac{1}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

$\int_2^{+\infty} e^{-x}dx$ converge (intégrale de référence).

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge.

Partie IV

13)f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ donc $(x,y) \mapsto f(x)$ et $(x,y) \mapsto f(y)$ sont de classe C^1 sur $]1,+\infty[^2$.
$(x,y) \mapsto xy$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $]1,+\infty[^2$.
Par somme, F est de classe C^1 sur $]1,+\infty[^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1.

$\partial_1 F(x,y) = f'(x) - y$ et $\partial_2 F(x,y) = f'(y) - x$.

Les points critiques de F sont les solutions sur $]1,+\infty[^2$ du système :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_1 F(x,y) = 0 \\ \partial_2 F(x,y) = 0\end{array}\right.$$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) - y = 0 \\ f'(y) - x = 0 \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = y \\ f'(y) = x \end{array} \right. \quad (*)$

• premier cas : $x < y$

Par stricte croissance de f', on a : $f'(x) < f'(y)$, puis $y < x$, grâce à $(*)$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du premier cas.

• deuxième cas : $x > y$

Par stricte croissance de f', on a : $f'(x) > f'(y)$, puis $y > x$, grâce à $(*)$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du deuxième cas.

• trosième cas : $x = y$

$(*)$ est équivalent à : $\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) & = x \\ y & = x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \end{array} \right.$ grâce à I)4)b).

Donc F admet (α, α) comme unique point critique.

14)a)f est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$ donc $(x, y) \mapsto f(x)$ et $(x, y) \mapsto f(y)$ sont de classe C^2 sur $]1, +\infty[^2$.

$(x, y) \mapsto xy$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $]1, +\infty[^2$.

Par somme, F est de classe C^2 sur $]1, +\infty[^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2.

$\partial_{1,1}F(x, y) = \partial_1 (\partial_1 F(x, y)) = \partial_1 (f'(x) - y) = f''(x)$,

$\partial_{1,2}F(x, y) = \partial_1 (\partial_2 F(x, y)) = \partial_1 (f'(y) - x) = -1$,

$\partial_{2,1}F(x, y) = \partial_2 (\partial_1 F(x, y)) = \partial_2 (f'(x) - y) = -1$,

$\partial_{2,2}F(x, y) = \partial_2 (\partial_2 F(x, y)) = \partial_2 (f'(y) - x) = f''(y)$.

La matrice hessienne de F en (α, α) est : $\begin{pmatrix} \partial_{1,1}F(\alpha, \alpha) & \partial_{1,2}F(\alpha, \alpha) \\ \partial_{2,1}F(\alpha, \alpha) & \partial_{2,2}F(\alpha, \alpha) \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}$.

b)λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow det \begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow (f''(\alpha) - \lambda)^2 - (-1)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow f''(\alpha) - \lambda = \pm 1$

$\Longleftrightarrow \lambda = f''(\alpha) - 1$ ou $\lambda = f''(\alpha) + 1$.

Les VP de la matrice hessienne de F en (α, α) sont $f''(\alpha) - 1$ et $f''(\alpha) + 1$.

Elles sont strictement positives car d'après I)4)a), $\forall x > 0, \ f''(x) > 1$.

Donc F admet en (α, α) un minimum local.

Exercice 2 (eml 2017)

Partie I

1)Pour tous polynômes P et Q de E, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} a(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)-X(\lambda P+Q)' \\ &= \lambda P+Q-X(\lambda P'+Q') \\ &= \lambda(P-XP')+(Q-XQ') \\ &= \lambda a(P)+a(Q). \end{aligned}$$

Donc a est linéaire.

Pour tout $P \in E$, $deg(P') \leq 1$ donc $deg(XP') \leq 2$, puis $deg(P-XP') \leq 2$.
Donc $\forall P \in E,\ a(P) \in E$, ce qui prouve que a est « endo ».

Ainsi, a est un endomorphisme de E.

2)a)$a(e_0) = e_0 - Xe_0' = 1 - X0 = 1 = 1e_0 + 0e_1 + 0e_2$,
$a(e_1) = e_1 - Xe_1' = X - X1 = 0 = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2$,
$a(e_2) = e_2 - Xe_2' = X^2 - X(2X) = -X^2 = 0e_0 + 0e_1 - 1e_2$.

Donc $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2)b)Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

La deuxième colonne est nulle donc $rg(A) = dim\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice du $Vect$ et libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base du $Vect$.
Donc $rg(A) = 2$.

3)• $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $rg(A) < 3$ donc A n'est pas inversible.
En conséquence, a n'est pas bijectif.

• $Ker(a) = \{P \in E,\ \mid a(P) = 0\}$.

Posons $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ et $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ son vecteur colonne dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} P \in Ker(a) &\iff a(P) = 0 \\ &\iff AU = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \alpha = 0 \text{ et } -\gamma = 0. \end{aligned}$$

Donc $Ker(a) = \{\beta X, \beta \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\big(X\big) = \text{Vect}\,(e_1)$.

(X) est une famille génératrice de $Ker(a)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $Ker(a)$.

• $Im(a) = \text{Vect}\ (a(e_0), a(e_1), a(e_2)) = \text{Vect}\ \big(1, 0, -X^2\big) = \text{Vect}\ \big(1, X^2\big)$.
$(1, X^2)$ est une famille génératrice de $Im(a)$ et libre car 1 et X^2 ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $Im(a)$.

Partie II

4)Soit d l'endomorphisme de E défini par $\forall Q \in E,\ d(Q) = Q + Q' + Q"$.

Pour tout polynôme P de E, on a :

$$\begin{aligned}
(b \circ d)(Q) &= b\big(d(Q)\big) \\
&= b\left(Q + Q' + Q"\right) \\
&= \big(Q + Q' + Q"\big) - \big(Q + Q' + Q"\big)' \\
&= Q + Q' + Q" - \big(Q' + Q'' + Q"'\big) \\
&= Q - Q''' \\
&= Q \text{ car } Q''' \text{ est nul puisque } deg(Q) \leq 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d \circ b)(Q) &= d\big(b(Q)\big) \\
&= d\left(Q - Q'\right) \\
&= \big(Q - Q'\big) + \big(Q - Q'\big)' + \big(Q - Q'\big)'' \\
&= \big(Q - Q'\big) + \big(Q' - Q''\big) + \big(Q'' - Q'''\big) \\
&= Q - Q''' \\
&= Q.
\end{aligned}$$

Donc $b \circ d = d \circ b = \text{Id}_E$.

Donc b est bijectif et $b^{-1} = d$. Ainsi, $\forall Q \in E,\ b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q"$.

5)a)$b(e_0) = e_0 - e_0' = 1 - 0 = 1 = 1e_0 + 0e_1 + 0e_2$,
$b(e_1) = e_1 - e_1' = X - 1 = -1e_0 + 1e_1 + 0e_2$,
$b(e_2) = e_2 - e_2' = X^2 - 2X = 0e_0 - 2e_1 + 1e_2$.

Donc $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B est triangulaire. Ses valeurs propres sont sur sa diagonale.
Donc $sp(B) = \{1\}$.

5)b)Supposons B diagonalisable. Alors, il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de B. Donc $D = I$.
On a alors : $B = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.
Donc B n'est pas diagonalisable et b non plus.

Partie III

6)$c(e_0) = 2Xe_0 - (X^2-1)e_0' = 2X1 - (X^2-1)0 = 2X = 0e_0 + 2e_1 + 0e_2$,
$c(e_1) = 2Xe_1 - (X^2-1)e_1' = 2X^2 - (X^2-1)1 = X^2+1 = 1e_0 + 0e_1 + 1e_2$,
$c(e_2) = 2Xe_2 - (X^2-1)e_2' = 2X^3 - (X^2-1)2X = 2X = 0e_0 + 2e_1 + 0e_2$.

Donc $C = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7)C possède deux colonnes identiques donc $rg(C) \leq 2$.
Donc C n'est pas inversible. Ainsi, c n'est pas bijectif.

8)a)Cherchons les valeurs propres et sous-espaces propres de C.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $E_\lambda(C) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (C-\lambda I)U = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(C-\lambda I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y & = 0 \\ 2x - \lambda y + 2z & = 0 \\ y - \lambda z & = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ 2x - \lambda^2 x + 2z = 0 \\ \lambda(x-z) = 0 \end{cases}$$

.

La troisième équation amène une discussion.

• $\lambda = 0$

Le système est équivalent à : $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 0(x-z) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$

Donc $E_0(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0, z = -x \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_0(C)$ est non nul donc 0 est valeur propre de C, ce qu'on savait déjà par la question 7).
De plus, le sous-espace propre de C associé à 0 est $E_0(C)$.
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(C)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Donc c'est une base de $E_0(C)$.

• $\lambda \neq 0$

Le système est équivalent à : $\left\{\begin{array}{l} y = \lambda z \\ (4-\lambda^2)z = 0 \\ x = z \end{array}\right.$

(i)$\lambda = 2$

Le système est équivalent à : $\left\{\begin{array}{l} y = 2z \\ x = z \end{array}\right.$

Donc $E_2(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 2z, x = z \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_2(C)$ est non nul donc 2 est valeur propre de C.
De plus, le sous-espace propre de C associé à 2 est $E_2(C)$.
Une base de $E_2(C)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(ii)$\lambda = -2$

Le système est équivalent à : $\left\{\begin{array}{l} y = -2z \\ x = z \end{array}\right.$

Donc $E_{-2}(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -2z, x = z \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_{-2}(C)$ est non nul donc -2 est valeur propre de C.
De plus, le sous-espace propre de C associé à -2 est $E_{-2}(C)$.
Une base de $E_{-2}(C)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(iii)$\lambda \neq -2, 0, 2$

La deuxième équation donne $z = 0$, puis $x = y = 0$. Donc $E_\lambda(C)$ est nul et λ n'est pas valeur propre de C.

Concluons : $C \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes -2, 0 et 2.
Donc C est diagonalisable.
Il existe donc une matrice $R \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $C = RDR^{-1}$.
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de C à savoir -2, 0 et 2.
L'énoncé impose que $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les colonnes de R sont formées des bases des sous-espaces propres de C.

On prend $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8)b)C est diagonalisable donc c également.
Compte tenu des bases trouvées pour $E_{-2}(C)$, $E_0(C)$ et $E_2(C)$, on obtient $(1-2X+X^2)$, $(1-X^2)$ et $(1+2X+X^2)$ comme bases respectives de $E_{-2}(c)$, $E_0(c)$ et $E_2(c)$.

La famille $(1-2X+X^2, 1-X^2, 1+2X+X^2)$ est libre car constituée de vecteurs propres de c associés à des valeurs propres différentes.
C'est une famille libre de vecteurs de E dont le cardinal coïncide avec la dimension de E, c'est donc une base de E.

Partie IV

9)Pour tout polynôme P de E, on a :

$$\begin{aligned}
f(P) &= (b\circ a - a\circ b)(P)\\
&= b\,(a(P)) - a\,(b(P))\\
&= b\left(P - XP'\right) - a\left(P-P'\right)\\
&= \left(P-XP'\right) - \left(P-XP'\right)' - \Big(\left(P-P'\right) - X\left(P-P'\right)'\Big)\\
&= P - XP' - \left(P' - 1P' - XP''\right) - P + P' + X\left(P'-P''\right)\\
&= P - XP' - P' + P' + XP'' - P + P' + XP' - XP''\\
&= P'.
\end{aligned}$$

10)$\forall P \in E, f^3(P) = P''' = 0$ car $deg(P) \leq 2$. Donc $f^3 = 0$.

Or, $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(b\circ a - a\circ b) = BA - AB$.

Donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f^3) = (BA-AB)^3$.

Comme $f^3 = 0$, on déduit que $(BA-AB)^3 = 0$.

Exercice 3 (eml 2017)

Partie I

1)programme :

```
import numpy.random as rd
def rouges(n):
    b=1
    r=2
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        x=rd.random()
        if x<r/(b+r):
            s=s+1
            r=r+1
        else:
            b=b+1
    return s
```

Explications :
La fraction $r/(b+r)$ représente la proportion de boules rouges au moment d'effectuer le k-ième tirage donc la probabilité de tirer une boule rouge au k-ième tirage.
Comme x est un réel aléatoire de $[0,1]$, la condition du test se réalise avec la probabilité $r/(b+r)$. Si ce test est réalisé, il est donc légitime de dire qu'on a tiré une rouge, ce qui fait augmenter s de 1.

2)programme :

```
n=10
m=0
for i in range(1000):
    m=m+rouges(n)
print(m/1000)
```

Explications :
On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 10 tirages dans l'urne. On répète cette expérience 1000 fois.
A l'issue, le nombre m représente le nombre total de boules rouges obtenues lors des 1000 expériences aléatoires.
Le nombre $m/1000$ représente donc le nombre moyen de boules rouges obtenues lors des 1000 expériences aléatoires.
Du fait du grand nombre d'expériences aléatoires réalisées, $m/1000$ est proche de l'espérance de la variable aléatoire S_{10}.

On peut donc conjecturer que $E(S_{10}) \approx 6,657$.

Partie II

3)a)Y peut prendre n'importe quelle valeur entière non nulle et arbitrairement grande. Ainsi, $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P\left(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{n-1} \cap B_n\right) \\ &= P(R_1) P_{R_1}(R_2) \cdots P_{R_1 \cap ... \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) P_{R_1 \cap ... \cap R_{n-1}}(B_n) \\ &= P(R_1) \left(\prod_{k=1}^{n-2} P_{R_1 \cap ... \cap R_k}(R_{k+1}) \right) P_{R_1 \cap ... \cap R_{n-1}}(B_n) \qquad (*) \end{aligned}$$

Calculons $P_{R_1 \cap ... \cap R_k}(R_{k+1})$. Supposons $R_1 \cap ... \cap R_k$ réalisé.

Les k premiers tirages ont amené chacun une boule rouge supplémentaire dans l'urne.

Au moment d'effectuer le $k+1$-ème tirage, l'urne contient donc 1 boule bleue et $k+2$ boules rouges, pour un total de $k+3$ boules.

On a alors $P_{R_1 \cap ... \cap R_k}(R_{k+1}) = \dfrac{k+2}{k+3}$.

Calculons $P_{R_1 \cap ... \cap R_{n-1}}(B_n)$. Supposons $R_1 \cap ... \cap R_{n-1}$ réalisé.

Les $n-1$ premiers tirages ont amené chacun une boule rouge supplémentaire dans l'urne.

Au moment d'effectuer le n-ième tirage, l'urne contient donc 1 boule bleue et $(n-1)+2 = n+1$ boules rouges, pour un total de $n+2$ boules.

On a alors $P_{R_1 \cap ... \cap R_k}(R_{k+1}) = \dfrac{1}{n+2}$.

En reportant dans $(*)$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= \frac{2}{3} \times \left(\prod_{k=1}^{n-2} \frac{k+2}{k+3} \right) \times \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

b)Y admet une espérance ssi la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left| nP(Y=n) \right|$ converge.

Or, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left| nP(Y=n) \right| = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n}$ diverge car de même nature que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left| nP(Y=n) \right|$ diverge.

Donc Y n'admet pas d'espérance. Elle n'admet donc pas de variance.

Partie III

4)$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

5)$X_1(\Omega) = [\![0,1]\!]$ donc X_1 suit une loi de Bernoulli.
Son paramètre est : $P(X_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3}$. Ainsi, $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Le cours donne : $E(X_1) = \frac{2}{3}$ et $V(X_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

6)a)$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [\![0,1]\!]$.
Il faut déterminer les 4 probabilités $P(X_1 = i \cap X_2 = j)$ pour $(i,j) \in [\![0,1]\!]^2$.

$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$,

$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$,

$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = P(R_1 \cap B_2) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$,

$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

b)$X_2(\Omega) = \{0,1\}$ donc X_2 suit une loi de Bernoulli.
Son paramètre est $P(X_2 = 1)$ qu'on calcule par la formule des probabilités totales pour le sce $\big((X_1 = 0), (X_1 = 1)\big)$:

$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

Ainsi, $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(2/3)$.

6)c)$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.
Donc $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$.
On conclut que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

7)a)La formule des probabilités composées donne :

$P(R_1 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_n)$

$= P(R_1)P_{R_1}(R_2)...P_{R_1 \cap ... \cap R_{k-1}}(R_k)P_{R_1 \cap ... \cap R_k}(B_{k+1})...P_{R_1 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_{n-1}}(B_n)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times ... \times \frac{2+(k-1)}{3+(k-1)} \times \frac{1}{3+k} \times ... \times \frac{1+(n-1-k)}{3+(n-1)}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times ... \times \frac{k+1}{k+2} \times \frac{1}{k+3} \times ... \times \frac{n-k}{n+2}$

$= \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!/2}$.

Donc $P(R_1 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_n) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$.

7)b)Pour tout k-uplet $(i_1, i_2, ..., i_k)$ tel que $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, soit l'événement pour lesquels seuls les tirages numéros i_1, i_2, ..., i_k sont rouges.

Il y a $\binom{n}{k}$ événements de ce type, chacun d'eux ayant la même probabilité que l'événement $P(R_1 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_n)$ (on effectue la formule des probabilités composées, le dénominateur est toujours $3 \times 4... \times (n+2)$ et le numérateur constitué du produit de boules rouges et boules blanches possibles à chaque tirage est toujours $2 \times ... \times (k+1) \times 1 \times ...(n-k))$.

Enfin, l'événement $(S_n = k)$ est la réunion des $\binom{n}{k}$ événements précédents incompatibles deux à deux.

Donc $P(S_n = k) = \binom{n}{k} P(R_1 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_n)$.

$$\begin{aligned}
\text{On déduit : } P(S_n = k) &= \binom{n}{k} \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\
&= \frac{n!}{\cancel{(n-k)!}k!} \times \frac{2(k+1)!\cancel{(n-k)!}}{(n+2)!} \\
&= \frac{2 \times \cancel{n!}\cancel{k!}(k+1)}{\cancel{k!}\cancel{n!}(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

8)S_n est discrète finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (k^2 + k) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \left(\frac{n\cancel{(n+1)}[(2n+1)+3]}{6} \right) \\
&= \frac{2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \left(\frac{n\cancel{(n+1)}[(2n+1)+3]}{6} \right) \\
&= \frac{2}{\cancel{(n+2)}} \left(\frac{n[2\cancel{(n+2)}}{6} \right) \\
&= \frac{2n}{3}.
\end{aligned}$$

9)a)Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Supposons l'événement $(S_n = k)$ réalisé.
Cela signifie que les n premiers tirages ont amené k boules rouges et $n-k$ boules bleues supplémentaires.
L'urne contient alors $n+3$ boules au total dont $k+2$ boules rouges.
Pour réaliser l'événement $(X_{n+1} = 1)$, il faut alors tirer une boule rouge au $(n+1)$-ième tirage avec une probabilité de $\dfrac{k+2}{n+3}$.
Ainsi, $P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{k+2}{n+3}$.
9)b)Comme $S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$, la famille d'événements $(S_n = k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet.
La formule des probabilités totales pour ce sce donne alors :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k \cap X_{n+1} = 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{(S_n=k)}(X_{n+1} = 1)P(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3} P(S_n = k) \\
&= \frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n} (k+2)P(S_n = k) \\
&= \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} kP(S_n = k) + \sum_{k=0}^{n} 2P(S_n = k)\right) \\
&= \frac{1}{n+3}\left(E(S_n) + 2\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)\right) \\
&= \frac{E(S_n)+2}{n+3}.
\end{aligned}$$

9)c)Comme $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$, on déduit : $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{\frac{2n}{3}+2}{n+3} = \dfrac{2}{3}$.
Par ailleurs, X_{n+1} suit une loi de Bernoulli puisque $X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$.
Donc $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(2/3)$.
On constate donc que $\forall n \in \mathbf{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(2/3)$.

Partie IV

10)Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Remarquons que $T_n(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$.

• si $x < 0$, l'événement $(T_n \leq x)$ est impossible car T_n ne prend pas de valeurs négatives.
Donc $P(T_n \leq x) = 0$.

• si $x > 1$, l'événement $(T_n \leq x)$ est certain puisque toutes les valeurs prises par T_n sont inférieures ou égales à 1.
Donc $P(T_n \leq x) = 1$.

11)Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
P(T_n \leq x) &= P(S_n \leq nx) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (k+1) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} j \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{\big(\lfloor nx \rfloor + 2\big)\big(\lfloor nx \rfloor + 1\big)}{2} \\
&= \frac{\big(\lfloor nx \rfloor + 2\big)\big(\lfloor nx \rfloor + 1\big)}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$