Chapitre 3 : matrice d'une application linéaire

Dans tout le chapitre, E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

I)Matrice d'une application linéaire

Propriété 1
Soit E un espace vectoriel de base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$.
Toute application linéaire $f : E \to F$ est uniquement déterminée par la donnée des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), ..., f(\overrightarrow{e_n})$.

Déf : soient E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathscr{C} = (\overrightarrow{\epsilon_1}, ..., \overrightarrow{\epsilon_p})$.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{e_j})$ dans la base $\mathscr{C}$.

Remarque
$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à la famille $\mathscr{D} = (f(\overrightarrow{e_1}), ..., f(\overrightarrow{e_n}))$.

<u>Exercice 1</u>
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ qui à tout couple (x, y) associe :

$$f(x, y) = (-x + y, 2x - 3y, 4x).$$

On note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\mathscr{C} = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, \overrightarrow{\epsilon_3})$ les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.

Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

<u>Exercice 2</u>
On note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\mathscr{C} = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, \overrightarrow{\epsilon_3})$ les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer une famille génératrice de Imf.

Théorème 1 (calcul matriciel de f(u) et de Kerf)
Soient E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Soit f une application linéaire de E dans F. Soit $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de E de vecteur colonne U dans la base $\mathscr{B}$.

1)Le vecteur colonne de $f(\overrightarrow{u})$ dans la base $\mathscr{C}$ est AU.

2)En particulier, $\overrightarrow{u} \in \ Kerf \Longleftrightarrow AU = O$.

<u>Exercice 3</u>
Soient $E = \mathbf{R}^3$ et $F = \mathbf{R}^2$, munis de leur base canonique $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $\mathscr{C} = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2})$.
Soit $f : E \to F$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$. Calculer $f(\overrightarrow{u})$ de deux façons différentes.

II)Matrice d'un endomorphisme

Pour un endomorphisme f de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E, on prend $\mathscr{C} = \mathscr{B}$, ce qui donne la définition suivante :

Déf : soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$.
Soit f un endomorphisme de E.
On appelle matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, notée $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(\overrightarrow{e_j})$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 4
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui à tout triplet (x, y, z) associe :

$$f(x, y, z) = (4x + 2y, -3x + y, 5x - 7z).$$

Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 5
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ défini pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = (X - 1)P' + 3P.$$

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.

Propriété 2
Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$. Alors, $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(id_E) = I_n$.

III)Opérations

Dans tout le paragraphe, E, F et G sont des espaces vectoriels de dimension finie. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.

Propriété 3
Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F .
L'application de $\mathscr{L}(E, F)$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ qui à f associe $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme.

Remarque
La linéarité de l'application se traduit par : $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\lambda f + g) = \lambda \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) + \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(g)$.

Propriété 4
Soient E, F, G des espaces vectoriels de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$.
Pour toutes applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on a :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(gof) = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Propriété 5
Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B}$.
Pour tout endomorphisme f de E et tout entier $k \geq 0$, on a :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}\left(f^k\right) = \left(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)\right)^k .$$

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice de $g = f^3 - 2f - 5id_E$ dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 2
Soient E et F des espaces vectoriels de **même dimension**, de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
f est bijective $\Longleftrightarrow \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.
Et alors $\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = (\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))^{-1}$.

Exercice 7 - ecricome 2000
Soit f l'application de $\mathbf{R}_3[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbf{R}_3[X]$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X).$$

1)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

2)Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

3)Justifier que f est bijectif et préciser la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 3
Soient E et F des espaces vectoriels de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Alors, $rg(f) = rg\left(\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)$.

IV)Changement de base

Théorème 4 (formule de changement de base pour les endomorphismes)
Soit E un espace vectoriel. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soit f un endomorphisme de E.
On a alors la formule :

$$A' = P^{-1}AP \text{ où } A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f),\ A' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) \text{ et } P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Déf : deux matrices A et A' de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ inversible telle que $A' = P^{-1}AP$ ou $A' = PAP^{-1}$.

Remarque
Le théorème 4 montre que les matrices d'un même endomorphisme sont toutes semblables entre elles.

Exercice 8
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'})$ la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^2$ définie par $\overrightarrow{e_1'} = (1,2)$ et $\overrightarrow{e_2'} = (2,-1)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$f(x,y) = (x-y, x+y).$$

1)Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2)Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

3)Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.

4)En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Réponses :
1)$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 2)$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$ 3)$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
4)$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.