

Correction DS1 cubes ecg2 - maths appliquées

Exercice 1-2 (edhec 2014)

1)a) Pour tout réel λ , on a :

$$\begin{aligned}
 A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
 &\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{matrix} \\
 &\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & \lambda+2 & 1-\lambda \\ 0 & -23-\lambda & \lambda^2-10\lambda+15 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow (7-\lambda)L_1 - 6L_3 \end{matrix} \\
 &\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -21 & \lambda^2-11\lambda+16 \\ 0 & -23-\lambda & \lambda^2-10\lambda+15 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
 &\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -21 & \lambda^2-11\lambda+16 \\ 0 & 0 & \lambda^3-9\lambda^2-27\lambda+53 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow (23+\lambda)L_2 - 21L_3 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

λ est valeur propre de $A \iff A - \lambda I$ n'est pas inversible $\iff \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$

Les valeurs propres λ de A sont donc les solutions de l'équation :

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0.$$

b) f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 3x^2 - 18x - 27$.

Les racines de f' sont $x_1 = \frac{18 - \sqrt{648}}{6} = \frac{18 - 18\sqrt{2}}{6} = 3 - 3\sqrt{2}$ et $x_2 = 3 + 3\sqrt{2}$.

Quand $x \rightarrow \infty$, on écrit : $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{9}{x} - \frac{27}{x^2} + \frac{53}{x^3} \right)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{9}{x} - \frac{27}{x^2} + \frac{53}{x^3} \right) = 1$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$3-3\sqrt{2}$	$3+3\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	z	$-$	z	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ M $\searrow$ m $\nearrow$ $+\infty$				

c) $f(0) = 53$ et $f(3) = -82$.

De l'encadrement $3 - 3\sqrt{2} \leq 0 \leq 3 \leq 3 + 3\sqrt{2}$ et de la décroissance de f sur $[3 - 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}]$, on déduit :

$f(3 - 3\sqrt{2}) \geq f(0) \geq f(3) \geq f(3 + 3\sqrt{2})$, soit $M \geq 53 \geq -82 \geq m$.

Donc $m < 0$ et $M > 0$.

d) D'après 1)a), les valeurs propres de A sont les racines de f .

f est strictement croissante et continue sur $]-\infty, 3 - 3\sqrt{2}]$. Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, 3 - 3\sqrt{2}]$ sur $]-\infty, M]$.

$0 \in]-\infty, M]$ car $M > 0$. Il admet un unique antécédent $\lambda_1 \in]-\infty, 3 - 3\sqrt{2}]$.

De la même façon, on voit que f s'annule une fois aussi sur $]3 - 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}]$ en un certain réel λ_2 et également sur $]3 + 3\sqrt{2}, +\infty]$ en un réel λ_3 .

Ainsi, A admet trois valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

e) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable. D'après le théorème de réduction, il existe donc une matrice D diagonale (dont la diagonale est formée des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A) et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
 2)a) \text{ Soit } M &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}. \\
 MD = DM &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 & c\lambda_3 \\ d\lambda_1 & e\lambda_2 & f\lambda_3 \\ g\lambda_1 & h\lambda_2 & i\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 & c\lambda_1 \\ d\lambda_2 & e\lambda_2 & f\lambda_2 \\ g\lambda_3 & h\lambda_3 & i\lambda_3 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b\lambda_2 = b\lambda_1 \\ c\lambda_3 = c\lambda_1 \\ d\lambda_1 = d\lambda_2 \\ f\lambda_3 = f\lambda_2 \\ g\lambda_1 = g\lambda_3 \\ h\lambda_2 = h\lambda_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b(\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \\ c(\lambda_3 - \lambda_1) = 0 \\ d(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ f(\lambda_3 - \lambda_2) = 0 \\ g(\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \\ h(\lambda_2 - \lambda_3) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0, \text{ les } \lambda_i \text{ étant distinctes} \\
 &\Leftrightarrow M \text{ est diagonale.}
 \end{aligned}$$

$$b) M \in E \Leftrightarrow AM = MA$$

$$\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P^{-1}P}_I DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \underbrace{P^{-1}P}_I$$

$$\Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}MP \text{ commute avec } D$$

c) $M \in E$

$\Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D

$\Leftrightarrow P^{-1}MP$ est diagonale d'après 2)a)

$$\Leftrightarrow \exists (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid P^{-1}MP = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid M = P \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \exists (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid M = P \left[u \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \exists (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 \mid M = uP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + vP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M \text{ est combinaison linéaire de } P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

d) La question précédente prouve que

$$E = \text{Vect} \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right).$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

De plus, $\left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)$ est une famille génératrice de E .

Enfin, pour tous réels u, v et w , on a :

$$uP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + vP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en remontant les équivalences de 2)c)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u = v = w = 0.$$

Donc la famille $\left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)$ est libre.

Etant libre et génératrice de E , c'est une base de E . Donc $\dim E = 3$.

e) On sait d'après le cours que les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur de A .

S'il existait un polynôme annulateur non-nul de A de degré inférieur ou égal à 2, alors ce polynôme annulateur aurait au plus deux racines et A aurait donc au plus deux valeurs propres ce qui serait contradictoire car A en possède trois.

Ainsi, il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2.

Enfin, I , A , A^2 commutant avec A , elles appartiennent à E .

Soient a , b et c des réels tels que $aI + bA + cA^2 = 0$.

Posons $P(X) = a + bX + cX^2$. On a alors : $P(A) = 0$, ce qui prouve que P est un polynôme annulateur de A .

Compte tenu du début de la question 2)e), P est le polynôme nul. Donc $a = b = c = 0$, ce qui prouve la liberté de la famille (I, A, A^2) .

(I, A, A^2) est une famille libre de 3 vecteurs de l'espace vectoriel E dont la dimension est 3. C'est donc une base de E .

Exercice 3

Partie A :

1) On utilise la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$2) D = P^{-1}GP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = P^{-1}HP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D et Δ sont bien diagonales.

$$3) \text{ On vérifie que } H^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, HG = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } GH = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $H^n G = GH^n$ ».

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit : « $HG = GH$ », vrai d'après A3.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} H^{n+1}G &= (HH^n)G \\ &= H(H^n G) \\ &= H(GH^n) \quad \text{par Hypothèse de récurrence} \\ &= (HG)H^n \\ &= (GH)H^n \quad \text{d'après A3} \\ &= GH^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*, H^n G = GH^n$.

Partie B :

1) On peut constater d'abord quelle que soit la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, les matrices HMG et GMH le sont également par produit de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Puis, par différence, $f(M) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Donc f est « endo ».

De plus, pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, pour tout réel λ , on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= H(\lambda M + N)G - G(\lambda M + N)H \\ &= (H\lambda M + HN)G - (G\lambda M + GN)H \\ &= H\lambda MG + HNG - G\lambda MH - GNH \\ &= \lambda(HMG - GMH) + (HNG - GNH) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

On conclut f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2) $f(I) = HIG - GIH = HG - GH = 0$ d'après A3

$f(H) = HHG - GHH = H^2G - GH^2 = 0$ d'après A4 avec $n = 2$

$f(H^2) = HH^2G - GH^2H = H^3G - GH^3 = 0$ d'après A4 avec $n = 3$.

Donc les matrices I , H et H^2 appartiennent à $\text{Ker } f$.

$\text{Ker } f$ étant un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire.

Toute matrice combinaison linéaire de I , H et H^2 est donc encore dans $\text{Ker } f$.

Cela revient à dire que $\text{Vect}(I, H, H^2) \subset \text{Ker } f$.

3) Pour tous réels a , b et c , on a :

$$aI + bH + cH^2 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - 4b - 2c & 3b + 3c & 3b + 3c \\ -3b - 3c & a + 2b + 4c & 3b + 3c \\ -3b - 3c & 3b + 3c & a + 2b + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 4b - 2c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = -2c \end{cases}$$

$(-2, -1, 1)$ est solution du système. Donc la famille (I, H, H^2) est liée.

En remplaçant cette solution trouvée dans $(*)$, on obtient : $-2I - H + H^2 = 0$, soit $H^2 = H + 2I$.

Donc $\text{Vect}(I, H, H^2) = \text{Vect}(I, H)$.

(I, H) est une famille génératrice de $\text{Vect}(I, H)$ et libre car I et H ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\text{Vect}(I, H)$.

Donc $\dim \text{Vect}(I, H, H^2) = \dim \text{Vect}(I, H) = 2$.

Enfin, $\text{Vect}(I, H, H^2) \subset \text{Ker } f$ donc $\dim \text{Ker } f \geq \dim \text{Vect}(I, H, H^2)$.

C'est-à-dire : $\dim(\text{Ker } f) \geq 2$.

Partie C :

$$1) M \in \text{Ker} f \iff f(M) = 0$$

$$\iff HMG = GMH$$

$$\iff P\Delta P^{-1}MPDP^{-1} = PDP^{-1}MP\Delta P^{-1}$$

$$\iff \underbrace{P^{-1}P}_I \Delta P^{-1}MPDP^{-1} = \underbrace{P^{-1}P}_I DP^{-1}MP\Delta P^{-1}$$

$$\iff \Delta P^{-1}MPD \underbrace{P^{-1}P}_I = DP^{-1}MP\Delta \underbrace{P^{-1}P}_I$$

$$\iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta.$$

$$2) \text{ Soit } X \text{ une matrice quelconque de } \mathcal{M}_3(\mathbf{R}). \text{ Posons } X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

$$\Delta XD = DX\Delta$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4a & 4b & 2c \\ -2d & -2e & -f \\ -2g & -2h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & -2b & -2c \\ 4d & -2e & -2f \\ 2g & -h & -i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4b = -2b \\ 2c = -2c \\ -2d = 4d \\ -f = -2f \\ -2g = 2g \\ -2h = -h \end{cases}$$

$$\iff b = c = d = g = h = 0$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

En renommant les lettres $a \rightarrow \alpha$, $e \rightarrow \beta$ et $i \rightarrow \gamma$, on obtient :

$$\Delta XD = DX\Delta \iff X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3.$$

$$3) M \in \text{Ker} f$$

$$\iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta \quad \text{grâce à C1}$$

$$\iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{en appliquant C2 avec } X = P^{-1}MP$$

$$\iff M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

4) De la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} \text{Ker} f &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\text{Ker} f$.

De plus, pour tous réels α , β et γ , on a :

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre.

C'est une famille libre et génératrice de $\text{Ker} f$ donc une base de $\text{Ker} f$.

Donc $\dim \text{Ker} f = 3$.

Exercice 4 (extrait edhec 2007)

1) La fonction $g : x \mapsto x - \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

D'où le tableau de variations de g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$		1	

Le minimum de g vaut 1. Donc $\forall x > 0, g(x) \geq 1 > 0$.

Ainsi, $\forall x > 0, x - \ln x > 0$.

2)a) f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient et différence de fonctions continues.

Pour trouver $\lim_{x \rightarrow 0^+}$, on écrit :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$.

D'où, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

Finalement, f est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\text{b) } \forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \frac{\frac{x}{x - \ln x}}{x} = \frac{1}{x - \ln x}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$. Par différence, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty$.

Par inverse, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient et différence de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

d) On écrit comme pour la question 2)a) : $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ par croissances comparées. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right) = +\infty$.

Par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

e) $\forall x > 0, (x - \ln x)^2 > 0$ donc $f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 1 \iff x \leq e$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

f) Courbe

