TD4 - réduction des matrices carrées

<u>Exercice 1</u> ★ ☆ ☆☆

Montrer que 1 et -3 sont valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice 2</u> ★ ☆ ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer son sous-espace propre associé.

2)Montrer que -1 n'est pas valeur propre de A.

<u>Exercice 3</u> ★ ☆ ☆☆

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que U_1, U_2 et U_3 sont des vecteurs propres de A et préciser à quelle valeur propre ils sont associés.

<u>Exercice 4</u> ★ ☆ ☆☆

Ces matrices ont une ou plusieurs valeurs propres « évidentes ». Lesquelles ?

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice 5</u> ★ ☆ ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1)Déterminer la dimension des espaces vectoriels $E_1(A)$, $E_{-1}(A)$ et $E_2(A)$. Lesquels sont des sous-espaces propres de A ?

2)Que peut-on dire du spectre de A ?

<u>Exercice 6</u> ★ ☆ ☆☆

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que P est inversible.

2)Vérifier que $PA = TP$. En déduire les valeurs propres de A.

<u>Exercice 7</u> ★ ★ ☆☆

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose A inversible.

Montrer que λ est valeur propre de $A \iff \dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1}.

<u>Exercice 8</u> ★ ★ ☆☆

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}, A^k U = \lambda^k U$. Interpréter ce résultat.

Exercice 9 ★ ☆ ☆☆

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 10 ★ ★ ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1)Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

2)A est-elle diagonalisable ? inversible ?

Exercice 11 ★ ★ ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1)Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

2)A est-elle diagonalisable ? inversible ?

Exercice 12 ★ ☆ ☆☆

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 13 ★ ★ ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que 0,1 et 2 sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

2)A est-elle diagonalisable ?

3)Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et une matrice inversible
$P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Le couple (D, P) est-il unique ?

Exercice 14 ★ ★ ☆☆

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1)Vérifier que $(A - I)^3 = 0$, puis donner un polynôme annulateur de A.

2)En déduire que A admet une unique valeur propre à préciser.

3)Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 15 ★ ★ ★☆

Dans tout l'exercice, m désigne un réel strictement positif.

Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que M^2 est combinaison linéaire de I et M.

2)Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de M.
M est-elle diagonalisable ?

Exercice 16 (extrait HEC 2011) ★ ★ ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1)a)Justifier que A est diagonalisable.

b)Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer un vecteur propre associé.

c)Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

d)Déterminer une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A.

Dans toute la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On considère l'ensemble S_n des matrices $A = (a_{ij})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} \geq 0$,
- 1 est valeur propre de A,
- $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à 1.

2)L'ensemble S_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

3)Montrer que le produit de deux matrices de S_n est une matrice de S_n.

4)Soit $A = (a_{ij}) \in S_n$ et λ une valeur propre de A.

a)Montrer qu'il existe un vecteur $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix}$ tel que :

- V est un vecteur propre de A associé à λ,
- $\exists k \in [\![1,n]\!], v_k = 1$,
- $\forall i \in [\![1,n]\!], |v_i| \leq 1$.

b)Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, que vaut $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$?

c)En déduire que $|\lambda| \leq 1$ et $|\lambda - a_{kk}| \leq 1 - a_{kk}$.

d)Montrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de S_n sont strictement supérieurs à $1/2$, alors A est inversible.

Indications / Réponses

Exercice 1

Appliquer le THM1.

Exercice 2

1)On trouve $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 3

$AU_1 = 0U_1$, $AU_2 = 1U_2$ et $AU_3 = 2U_3$.

Exercice 4

Trouver le rang de C et de $D - I$.

Exercice 5

1)$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Exercice 6

2)Voir que A et T sont semblables.

Exercice 7

Revenir à la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.

Exercice 8

Revenir à la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.

Exercice 9

Appliquer le corollaire du théorème de réduction.

Exercice 10

1)$sp(A) = \{-2, 1, 2\}$.

$E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2)Appliquer le théorème de réduction.

Exercice 11

1)$sp(A) = \{-2, 1\}$.

$E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

2)Appliquer le théorème de réduction.

Exercice 12

A a quelque chose de spécial !

Exercice 13

1)$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3)Appliquer le THM4.

Exercice 14

2)Appliquer le THM 2.

3)Utiliser le THM 4.

Exercice 15

1)$M^2 = M + 2I$.

2)Chercher un polynôme annulateur de M.

$sp(A) = \{-1, 2\}$.

$E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix}\right)$, $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 16

1)b)$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à 1.

1)c)$sp(A) = \{-1/2, 1\}$.

$E_{-1/2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

1)d)$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2)non car $A \in S_n$ mais $-A \notin S_n$.

4)b)Utiliser que X_0 est vecteur propre de A associé à 1.

4)c)Pour montrer les inégalités, démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j = \lambda v_k$ et utiliser 4)a.

4)d)Utiliser la deuxième inégalité de 4)c).