TD12 - introduction aux probabilités

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆ (esc 2015 - option techno)
Chaque matin, l'élève Germaine se lève en retard avec la probabilité $1/3$.
Lorsqu'elle se lève en retard, elle doit prendre le bus pour se rendre au lycée.
Lorsque elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

On considère un matin donné et on définit les événements :
R = « Germaine se lève en retard » et B = « Germaine prend le bus ».

1)Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(B) = \dfrac{11}{15}$.

2)Un matin, Germaine prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?

Exercice 2 ★ ★ ☆☆ (edhec 1996 - option maths appliquées)
Un mobile **initialement en A** (instant zéro) se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC de la façon suivante :
si à l'instant n, il est sur un sommet donné, alors à l'instant $n+1$,
− soit il y reste avec la probabilité $2/3$,
− soit il se place sur l'un des deux sommets adjacents avec la probabilité $1/6$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère les événements :
A_n = « le mobile est en A à l'instant n »,
B_n = « le mobile est en B à l'instant n »,
C_n = « le mobile est en C à l'instant n ».
On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1)Que valent a_0, b_0 et c_0 ?

2)Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements. Que vaut $a_n + b_n + c_n$?

3)a)En appliquant la formule des probabilités totales pour le système complet (A_n, B_n, C_n), montrer les égalités :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{1}{6}c_n \\[2ex] b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{1}{6}c_n \\[2ex] c_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{2}{3}c_n \end{cases}$$

b)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n)$ et $a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - c_n)$.

4)Conclure que $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $b_n = c_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5)Au bout d'un grand nombre de déplacements, quelle est la probabilité que le mobile se retrouve en A ?

Exercice 3 ★ ★ ☆☆ (esc 2006 - option techno)
Une urne $\mathscr{U}_1$ contient 2 boules rouges et 3 boules bleues,
Une urne $\mathscr{U}_2$ contient 1 boule rouge et 0 boule bleue,
Une urne $\mathscr{U}_3$ contient 0 boule rouge et 1 boule bleue.
On choisit une urne au hasard, puis on effectue dans cette urne et **sans jamais en changer**, une série illimitée de tirages d'une boule **avec remise**.

On considère les événements suivants :
U_i = « on choisit l'urne $\mathscr{U}_i$ », pour tout $i \in [\![1,3]\!]$,
R_k = « le k-ième tirage amène une boule rouge », pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

1)a)Justifier que (U_1, U_2, U_3) est un système complet d'événements.

b)Préciser les probabilités conditionnelles $P_{U_1}(R_k)$, $P_{U_2}(R_k)$ et $P_{U_3}(R_k)$.

c)Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(R_k) = \dfrac{7}{15}$.

2)a)Justifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P_{U_1}(R_1 \cap ... \cap R_n) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Préciser de même les probabilités $P_{U_2}(R_1 \cap ... \cap R_n)$ et $P_{U_3}(R_1 \cap ... \cap R_n)$.

2)b)A l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(R_1 \cap ... \cap R_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}.$$

3)Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants pour la probabilité P ?

Exercice 4 ★ ★ ☆☆ (esc 2003 - option maths appliquées)
La probabilité qu'un billet de 100 euros soit réellement faux est $p \in]0,1[$.
Une banque dispose d'un détecteur (non infaillible) de faux billets qui allume une lumière suivant que le billet est vrai ou faux :
− si le détecteur considère que le billet est vrai, la lumière est bleue,
− si le détecteur considère que le billet est faux, la lumière est rouge.

Le banquier décide de tester un billet avec son détecteur.
On introduit les événements suivants :
F = « le billet testé est réellement faux »,
B = « la lumière du détecteur est bleue »,
R = « la lumière du détecteur est rouge ».

On suppose que $P_B(\overline{F}) = \alpha$ et $P_R(F) = \beta$ avec $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$.

On suppose de plus que $\alpha + \beta > 1$.

1)En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que $P(B) = \dfrac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}$.

2)En déduire que $1 - \alpha \leq p \leq \beta$.

3)Montrer que $P_F(B) = \dfrac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}$. Que représente cette probabilité ?

Exercice 5 ★ ★ ☆☆ (esc 2008 - option techno)
Une fois par semaine, Marcel prend chez le pâtissier un gâteau A,B ou C.
On considère pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ les événements suivants :
A_n = « La n-ième semaine, Marcel choisit le gâteau A »,
B_n = « La n-ième semaine, Marcel choisit le gâteau B »,
C_n = « La n-ième semaine, Marcel choisit le gâteau C ».

On suppose que la première semaine de l'année, Marcel choisit son gâteau au hasard, ce qui se traduit par $P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = 1/3$.

On suppose de plus pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ les règles suivantes :
− si Marcel choisit le gâteau A la semaine n, alors il choisit à la semaine $n+1$, le gâteau A avec la probabilité $1/3$ et le gâteau C avec la probabilité $2/3$,
− si Marcel choisit le gâteau B la semaine n, alors il choisit à la semaine $n+1$, le gâteau A avec la probabilité $1/3$ et le gâteau B avec la probabilité $2/3$,
− si Marcel choisit le gâteau C la semaine n, alors il reprend à la semaine $n+1$ le gâteau C (car il est trop bon !)

On note $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1)A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

2)Exprimer de même $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

3)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_{n+1} = TU_n$.

4)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n = T^{n-1}U_1$.

5)La blague du jour : quelle est la probabilité que Marcel mange du gâteau à Noël ?

Exercice 6 ★ ★ ☆☆ (esc 2008 - option maths appliquées)
Une roue de loterie se compose de 12 secteurs identiques numérotés de 1 à 12.
A chaque partie, Léon mise sur un, deux ou trois numéros parmi les douze, puis fait tourner la roue.
Si la roue s'arrête devant l'un des numéros que Léon a choisi, il gagne la partie.

Léon décide d'adopter la stratégie suivante :
− à la première partie, il mise sur le chiffre 1,
− pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, s'il perd la n-ième partie, il mise sur les chiffres 1 et 2 à la $n+1$-ième partie,
− pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, s'il gagne la n-ième partie, il mise sur les chiffres 1,3 et 5 à la $n+1$-ième partie.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note G_n = « Léon gagne la n-ième partie » et $p_n = P(G_n)$.

1)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, préciser les probabilités $P_{G_n}(G_{n+1})$ et $P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$.

2)A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$

3)En déduire l'expression de p_n en fonction de n, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆ (ecricome 2011 - option maths appliquées)
Sur un quadrillage de 3 par 3, on coche 3 cases au hasard.
On considère les événements suivants :
H = « les 3 cases cochées sont alignées horizontalement »,
V = « les 3 cases cochées sont alignées verticalement »,
D = « les 3 cases cochées sont alignées en diagonale »,
N = « les 3 cases cochées ne sont pas alignées ».

1)Justifier qu'il y a 84 façons de cocher le quadrillage.

2)Déterminer $P(H)$, $P(V)$ et $P(D)$.

3)En déduire que $P(N) = \frac{19}{21}$.

Exercice 8 ★ ★ ★☆ (ecricome 2008 - option maths appliquées)
$n \geq 1$ et $b \geq 2$ désignent des entiers.
Marceline lance n boules au hasard dans b boites numérotées de 1 à b.
On suppose que Marceline ne manque jamais son coup.
Noter qu'à la fin des lancers, une boîte donnée peut contenir plusieurs boules.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère les événements suivants :
A_n = « les n boules sont toutes arrivées dans la même boîte »,
B_n = « les n boules sont toutes arrivées dans exactement deux boîtes »,
C_n = « les n boules sont toutes arrivées dans exactement n boîtes ».

1)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $P(A_n)$ en fonction de n et b.

2)Justifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(B_n) = \dfrac{\binom{b}{2}(2^n - 2)}{b^n}$.

3)a)Si $n > b$, que vaut $P(C_n)$?

b)Montrer que pour tout $n \in [\![1, b]\!],\ P(C_n) = \dfrac{b!}{(b-n)!b^n}$.

Exercice 9 ★ ★ ★★ (hec 2004 - option maths appliquées)
On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements :
P_n = « pile apparaît au n-ième lancer » et F_n = « face apparaît au n-ième lancer ».
Pour tout entier $n \geq 3$, on note $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ et $U_n = B_3 \cup ... \cup B_n$.
On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et $u_n = P(U_n)$ pour tout entier $n \geq 3$.

1)Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est monotone et convergente.

2)a)Calculer $P(B_n)$ pour tout entier $n \geq 3$.

b)Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont incompatibles deux à deux.

c)En déduire la valeur de u_3, u_4 et u_5.

3)Soit $n \geq 5$ un entier.

a)Justifier l'égalité des événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$, puis préciser leur probabilité.

b)Exprimer l'événement U_{n+1} à l'aide de U_n et B_{n+1}.

En déduire que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c)Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

En déduire la probabilité que la séquence « pile, pile, face »n'apparaisse jamais.

Indications / Réponses

Exercice 1

1)$P(B) = P(R\cap B)+P(\overline{R}\cap B) = P(R)P_R(B)+P(\overline{R})P_{\overline{R}}(B) = \frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{11}{15}$.

2)$P_B(\overline{R}) = \dfrac{P_{\overline{R}}(B)P(\overline{R})}{P(B)} = \dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11}$.

Exercice 2

1)$a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

2)$a_n + b_n + c_n = 1$.

3)a)La première égalité provient de la formule des probabilités totales :
$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$
Idem pour les deux autres ...

4)Les suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont géométriques de raison $1/2$.
Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - b_0)$ et $a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0 - c_0)$.

5)C'est $1/3$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1/3$.

Exercice 3

1)a)$U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \Omega$ et $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \varnothing$.

b)$P_{U_1}(R_k) = \frac{2}{5}$, $P_{U_2}(R_k) = 1$ et $P_{U_3}(R_k) = 0$.

c)$P(R_k) = P_{U_1}(R_k)P(U_1) + P_{U_2}(R_k)P(U_2) + P_{U_3}(R_k)P(U_3) = \cdots$

2)a)R_1, ..., R_n sont indépendants pour la probabilité P_{U_1} du fait de la remise.
On a de même $P_{U_2}(R_1 \cap ... \cap R_n) = 1^n = 1$ et $P_{U_3}(R_1 \cap ... \cap R_n) = 0^n = 0$.

2)b)$P(R_1 \cap ... \cap R_n) = P_{U_1}(R_1 \cap ... \cap R_n)P(U_1) + P_{U_2}(R_1 \cap ... \cap R_n)P(U_2)$
$+P_{U_3}(R_1 \cap ... \cap R_n)P(U_3)$.

3)Non car $P(R_1 \cap R_2) = \frac{29}{75} \neq P(R_1)P(R_2) = \frac{49}{225}$.

Exercice 4

1)La formule des probabilités totales donne $P(F) = P(B)P_B(F) + P(R)P_R(F)$,
c'est-à-dire : $p = P(B)(1 - \alpha) + \big(1 - P(B)\big)\beta$, équation d'inconnue $P(B)$.

2)Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 !

3)Formule de Bayes.

Exercice 5

1)$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) = \cdots$

2)On trouve $P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}P(B_n)$ et $P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + 1P(C_n)$.

3)C'est l'écriture matricielle des 3 égalités précédentes.

4)Pour l'hérédité, utiliser 3).

Exercice 6

1)$P_{G_n}(G_{n+1}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et $P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

2)$P(G_{n+1}) = P_{G_n}(G_{n+1})P(G_n) + P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})P(\overline{G_n}) = \cdots$

3)$(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
On résout l'équation $x = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}$, ce qui donne $x = \frac{2}{11}$.
Puis, on introduit $v_n = p_n - x = p_n - \frac{2}{11}$.
On vérifie que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$, ce qui donne $v_n = -\frac{13}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$.
Enfin, $p_n = \frac{2}{11} - \left(\frac{13}{132}\right)^{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{11}$.

Exercice 7

1)Cocher 3 cases parmi 9 revient à construire une combinaison de 3 éléments d'un ensemble comportant 9 éléments, ce qu'on peut faire de $\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = 84$ façons.

2)$P(H) = \frac{3}{84}$, $P(V) = \frac{3}{84}$ et $P(D) = \frac{2}{84}$.

3)Le système (H, V, D, N) est complet donc $P(H) + P(V) + P(D) + P(N) = 1$.

Exercice 8

1)$P(A_n) = \frac{b}{b^n} = \frac{1}{b^{n-1}}$.

3)a)si $n > b$, alors $P(C_n) = 0$.

Exercice 9

2)a)$\forall n \geq 3,\ P(B_n) = \frac{1}{8}$.

2)c)$u_3 = \frac{1}{8}$, $u_4 = \frac{1}{4}$ et $u_5 = \frac{3}{8}$.

3)a)$P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = \frac{1}{8}P(U_{n-2})$.

3)b)$U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$.

3)c)Un passage à la limite dans l'égalité 3)b) donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

La probabilité demandée est :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=3}^{+\infty} \overline{B_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=3}^{n} \overline{B_k}\right) && \text{corollaire du thm de la limite monotone}\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(\overline{\bigcup_{k=3}^{n} B_k}\right) && \text{formule de Morgan}\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(\overline{U_n}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - P(U_n)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} (1 - u_n)\\
&= 0.
\end{aligned}$$