TD2 - Applications linéaires

Exercice 1 ★ ★ ☆ ☆
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x,y) = (-2x + 4y, x - 2y, x - 2y).$$

1)Déterminer une base de $Kerf$, puis la dimension de $Kerf$.

2)Déterminer une base de Imf, puis la dimension de Imf.

3)f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2 ★ ★ ☆ ☆
Soit f l'application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + z \end{pmatrix}.$$

1)Déterminer une base de $Kerf$, puis la dimension de $Kerf$.

2)Déterminer une base de Imf, puis la dimension de Imf.

3)f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3 ★ ☆ ☆ ☆
Soit f l'application de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y - z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1)Vérifier que pour tout $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $f(U) = AU$.

2)A l'aide de la question 1), montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Exercice 4 ★ ★ ☆ ☆
Soient A et B deux matrices fixées de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Soit f l'application définie pour toute $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par :

$$f(M) = AM - MB.$$

1)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)Dans cette question, on prend $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a)Déterminer une base de $Kerf$, puis la dimension de $Kerf$.

b)Déterminer une base de Imf, puis la dimension de Imf.

c)On pose $F = Kerf \cap Imf$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et déterminer une famille génératrice de F. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 5 ★★☆☆

Soit f l'application définie pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = X(X-1)P' - 2XP.$$

1)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

2)Déterminer une base de $Kerf$, puis la dimension de $Kerf$.

3)Déterminer une base de Imf, puis la dimension de Imf.

Exercice 6 ★☆☆☆

Soit f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, c+d).$$

1)Montrer que f est linéaire.

2)Montrer que f est surjective.

3)A l'aide du théorème du rang, déterminer la dimension de $Kerf$.

Exercice 7 ★★☆☆

Soit f l'application définie pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x.$$

1)Montrer que f est linéaire.

2)Déterminer une base de $Kerf$, puis la dimension de $Kerf$.

3)Identifier Imf.

Exercice 8 ★★☆☆

Soit f l'application de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}^3$ définie pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$ par :

$$f(P) = \big(P(0), P(1), P(2)\big).$$

Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 9 ★★☆☆

Soit A une matrice fixée de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Soit f l'application définie pour toute $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par :

$$f(M) = AMA.$$

1)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)On suppose A inversible. Montrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 10 (extrait EML 2012) ★★☆☆

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit f l'application définie pour toute $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par :

$$f(M) = AMB.$$

1)Vérifier que A et B sont inversibles.

2)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

3)Montrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 11 ★ ★ ★☆
Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ une base de E.
Soit f un endomorphisme de E vérifiant les égalités :

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = -\vec{e_2} + \vec{e_3} - \vec{e_4} \\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} \\ f(\vec{e_3}) = \vec{e_1} + \vec{e_4} \\ f(\vec{e_4}) = \vec{e_2} - \vec{e_3} + \vec{e_4} \end{cases}$$

1)Montrer que $\forall k \in [\![1,4]\!], (fof)(\vec{e_k}) = \vec{0}$.

2)En déduire que $\forall \vec{u} \in E, (fof)(\vec{u}) = \vec{0}$.

3)Conclure que $Imf \subset Kerf$.

Exercice 12 ★ ★ ★☆
Soit E un espace vectoriel.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

1)Montrer que $\forall \vec{u} \in Kerf, g(\vec{u}) \in Kerf$.

2)Montrer que $\forall \vec{v} \in Imf, g(\vec{v}) \in Imf$.

Exercice 13 (extrait HEC 2009) ★ ★ ★★
Toutes les matrices de cet exercice sont dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Pour $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on note $d(M)$ son déterminant et $t(M)$ sa trace.[1]

1)a)Calculer $d(3I)$. L'application d est-elle linéaire ?

1)b)Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \forall B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), d(AB) = d(A)d(B)$.

1)c)Montrer que si A et B sont semblables[2], on a $d(A) = d(B)$.

2)a)Montrer que t est linéaire, puis déterminer son image et son noyau.

2)b)Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \forall B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), t(AB) = t(BA)$.

2)c)Montrer que si A et B sont semblables, on a $t(A) = t(B)$.

3)Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Trouver un couple (α, β) de réels qu'on exprimera en fonction de $d(A)$ et $t(A)$, vérifiant $A^2 = \alpha A + \beta I$.

1. trace=somme des coefficients diagonaux
2. A et B sont semblables s'il existe P inversible telle que $A = P^{-1}BP$

Indications / Réponses

Exercice 1

1)Une base de $Kerf$ est $\big((2,1)\big)$. La dimension de $Kerf$ est 1.

2)Une base de Imf est $\big((-2,1,1)\big)$. La dimension de Imf est 1.

3)f n'est ni injective, ni surjective (utiliser les THMS 1 et 2).

Exercice 2

Une base de $Kerf$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. La dimension de $Kerf$ est 1.

2)Une base de Imf est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. La dimension de Imf est 2.

3)f est surjective, mais n'est pas injective.

Exercice 4

2)a)Une base de $Kerf$ est $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. La dimension de $Kerf$ est 2.

b)Une base de Imf est $\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. La dimension de Imf est 2.

c)Ecrire F comme un Vect en se servant de la forme des matrices de $Kerf$ et Imf, trouvées précédemment. On trouve $dimF = 1$.

Exercice 5

1)Pour montrer que f est « endo », poser $P = aX^2 + bX + c$, vérifier que $f(P) = (-2a-b)X^2 + (-b-2c)X$. Montrer ensuite la linéarité de f.

2)$Kerf = \text{Vect}\left(X^2 - 2X + 1\right)$, puis trouver une base de $Kerf$.

3)$Imf = \text{Vect}\left(X, X^2 + X\right)$, puis trouver une base de Imf.

Exercice 6

1)Pour la linéarité, prendre $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et faire les calculs...

2)Calculer Imf et voir que $Imf = \mathbf{R}^2$.

3)On trouve $dimKerf = 2$.

Exercice 7

2)Poser $P = aX^2 + bX + c$. On trouve : $Kerf = \text{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\right)$.

3)$Imf = \mathbf{R}$.

Exercice 8

Montrer d'abord que f est linéaire.

La bijectivité de f s'obtient en montrant que $Kerf = \{0\}$ ou que $Imf = \mathbf{R}^3$.

Exercice 9

2)Montrer que le noyau de f est nul.

Exercice 10

3)On montre que toute $N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ a un unique antécédent $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par f, ce qui revient à résoudre l'équation $f(M) = N$ d'inconnue M et de paramètre N.

Exercice 11

2)Poser $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \lambda_3\overrightarrow{e_3} + \lambda_4\overrightarrow{e_4}$, puis calculer $(f \circ f)(\overrightarrow{u})$ en utilisant 1).

3)Prendre $\overrightarrow{v}$ dans Imf et montrer que $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$.

Exercice 12

1)Prendre $\overrightarrow{u}$ dans $Kerf$ et montrer que $f\left(g(\overrightarrow{u})\right) = \overrightarrow{0}$.
2)Prendre $\overrightarrow{v}$ dans Imf et trouver un vecteur $\overrightarrow{w}$ de E tel que $g(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{w})$.

Exercice 13

1)a)$d(3I) = 9 \neq 3d(I) = 3$ donc d n'est pas linéaire.
1)c)Utiliser 1)b).
2)a)$Imt = \mathbf{R}$ et $Kert = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
2)c)Utiliser 2)b).
3)On trouve $\alpha = t(A)$ et $\beta = -d(A)$.