Correction DS3 cubes

Problème

Partie A (rotations)

1)Soient $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathscr{R}$.

On obtient : $MN = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$.

Posons $e = ac - bd$ et $f = bc + ad$.

Alors, MN est de la forme $\begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
e^2 + f^2 &= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2 \\
&= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 \\
&= (a^2+b^2)c^2 + (a^2+b^2)d^2 \\
&= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\
&= 1 \times 1 \text{ car } M \in \mathscr{R} \text{ et } N \in \mathscr{R} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (M,N) \in \mathscr{R}^2,\ MN \in \mathscr{R}$.

2)Soit M une matrice quelconque de $\mathscr{R}$.

a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $M^n \in \mathscr{R}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $M^0 \in \mathscr{R}$ ».

Or, $M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{R}$, puisque de la forme souhaitée avec $a = 1$, $b = 0$ et $a^2 + b^2 = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $M^n \in \mathscr{R}$ et par énoncé $M \in \mathscr{R}$.
Par produit, $M^{n+1} = M^n M \in \mathscr{R}$ grâce à la question 1).
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ M^n \in \mathscr{R}$.

b)Posons $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

De l'égalité $a^2 + b^2 = 1$, on tire : $a^2 = 1 - b^2$ donc $a^2 \leq 1$.
On a alors : $0 \leq a^2 \leq 1$, d'où $-1 \leq a \leq 1$.
De même, $-1 \leq b \leq 1$, mais aussi $-1 \leq -b \leq 1$.

Ainsi, tous les coefficients de M appartiennent à $[-1, 1]$.

c)Posons $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Le déterminant de M vaut $a^2+b^2=1$. Il est non nul donc M est inversible.
Le cours donne : $M^{-1} = \dfrac{1}{detM}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

M^{-1} est de la forme $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ avec $c=-b$.

De plus, $a^2+c^2=a^2+b^2=1$. Donc $M^{-1} \in \mathscr{R}$.

3)$\mathscr{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathscr{R}$.

Partie B (nombre plastique)

4)a)Etudions $f : x \mapsto x^3 - x - 1$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 3x^2-1$.
Les racines de f' sont $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Le maximum local de f est $M = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$
$= \dfrac{-1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$.
Le minimul local de f est $m < 0$.
Donc f est strictement négative sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.
De plus, f est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.
D'après le théorème de bijection, f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ sur $[m, +\infty[$.
$0 \in [m, +\infty[$ admet donc un unique antécédent φ dans $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.
Ainsi, l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet une unique solution φ.
$f(1) = -1,\ f(\varphi) = 0$ et $f(2) = 5$. Donc $f(1) < f(\varphi) < f(2)$.
Comme f est strictement croissante sur $[1,2]$ on déduit : $1 < \varphi < 2$.

b)φ est solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ donc $\varphi^3 - \varphi - 1 = 0$, c'est-à-dire $\varphi^3 = \varphi + 1$.

$1 - \varphi^2 = \dfrac{\varphi(1-\varphi^2)}{\varphi} = \dfrac{\varphi - \varphi^3}{\varphi} = \dfrac{\varphi - (\varphi+1)}{\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$.

$\varphi^5 = \varphi^3 \times \varphi^2 = (\varphi+1)\varphi^2 = \varphi^3 + \varphi^2 = (\varphi+1) + \varphi^2 = \varphi^2 + \varphi + 1$.

$\varphi^{-4} = \dfrac{1}{\varphi^4} = \dfrac{\varphi^3 - \varphi}{\varphi^4} = \dfrac{\varphi(\varphi+1)\varphi - 1)}{\varphi \times \varphi^3} = \varphi - 1$.

5)λ est valeur propre de B

$\iff B - \lambda I_2$ n'est pas inversible

$\iff det(B - \lambda I_2) = 0$

$\iff (-\lambda)(-\varphi - \lambda) + \dfrac{1}{\varphi} = 0$

$\iff \lambda^2 + \varphi\lambda + \dfrac{1}{\varphi} = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = \varphi^2 - \dfrac{4}{\varphi} = \dfrac{\varphi^3 - 4}{\varphi} = \dfrac{\varphi + 1 - 4}{\varphi} = \dfrac{\varphi - 3}{\varphi}$.

$\Delta < 0$ puisque $1 < \varphi < 2$.

Donc l'équation n'a pas de solution, ce qui prouve que B ne possède aucune valeur propre.

6)a)Le déterminant de P vaut $-\sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \neq 0$. Donc P est inversible.

$$\text{De plus, } CP = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varphi}{2} & -\sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & -\dfrac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\varphi}{2} & 1 \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\varphi) & -\dfrac{\varphi}{2} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \end{pmatrix}.$$

avec $g(\varphi) = -\dfrac{\varphi^2}{4} - \dfrac{3-\varphi}{4\varphi} = \dfrac{-\varphi^3 - 3 + \varphi}{4\varphi} = \dfrac{-(1+\varphi) - 3 + \varphi}{4\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$.

$$PB = \begin{pmatrix} \dfrac{\varphi}{2} & 1 \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\varphi} & -\dfrac{\varphi}{2} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \end{pmatrix}.$$

On conclut que $CP = PB$.

b)En multipliant à gauche l'égalité précédente par P^{-1}, on a : $B = P^{-1}CP$.

Puis, on fait une récurrence en posant $\mathscr{P}(n)$: « $B^n = P^{-1}C^nP$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $B^0 = P^{-1}C^0P$ », soit « $I = P^{-1}IP$ », c'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n B \\ &= \left(P^{-1}C^nP\right)\left(P^{-1}CP\right) \text{ par HR et l'égalité du début} \\ &= P^{-1}C^{n+1}P. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ B^n = P^{-1}C^nP$.

7)a) $\sqrt{\varphi}\ C = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2} & -\sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4}} \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4}} & -\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2} \end{pmatrix}$.

$\sqrt{\varphi}\ C$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a = -\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}$ et $b = \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4}}$.

De plus, $a^2+b^2 = \left(-\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}\right)^2 + \dfrac{3-\varphi}{4} = \dfrac{\varphi^3+3-\varphi}{4} = \dfrac{\varphi+1+3-\varphi}{4} = 1$

Donc $\sqrt{\varphi}\ C$ appartient à $\mathscr{R}$.

D'après la question 2)a), on alors $\forall n \in \mathbf{N},\ \left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n \in \mathscr{R}$.

En multipliant membre à membre l'égalité 6)b) par $\left(\sqrt{\varphi}\right)^n$, on a :
$\left(\sqrt{\varphi}\right)^n B^n = \left(\sqrt{\varphi}\right)^n P^{-1}C^nP$, c'est-à-dire :

$$\left(\sqrt{\varphi}\right)^n B^n = P^{-1}\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n P \quad (*)$$

Les coefficients de $\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n$ étant dans l'intervalle $[-1,1]$, les coefficients de la matrice $P^{-1}\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n P$ sont des suites bornées (faire le calcul des produits de matrices, si nécessaire).

Posons alors : $B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et $P^{-1}\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n P = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix}$.

L'égalité $(*)$ donne :

$\left(\sqrt{\varphi}\right)^n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix}$, ce qui mène à : $a_n = \dfrac{x_n}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}$.

Comme la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée, il existe des constantes réelles m et M telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ m \leq x_n \leq M$. On déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{m}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n} \leq a_n \leq \frac{M}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\varphi}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{\varphi} > 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Enfin, le même raisonnement s'applique pour b_n, c_n et d_n, du fait des égalités : $b_n = \dfrac{y_n}{(\sqrt{\varphi})^n}$, $c_n = \dfrac{z_n}{(\sqrt{\varphi})^n}$, $d_n = \dfrac{t_n}{(\sqrt{\varphi})^n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

Partie C (calcul d'une puissance de matrice)

8)a)$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I$.

b)Posons $P(X) = X^3 - X - 1$. Alors, $P(A) = A^3 - A - I = 0$.
Donc P est un polynôme annulateur de A.
Les valeurs propres sont donc à chercher parmi les racines de P, polynôme dont l'unique racine est φ (voir question 4)). Ainsi, $sp(A) \subset \{\varphi\}$.
Il reste à confirmer que φ est bien une valeur propre de A.

$E_\varphi(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - \varphi I)U = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - \varphi I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -\varphi & 1 & 0 \\ 0 & -\varphi & 1 \\ 1 & 1 & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -\varphi x + y &= 0 \\ -\varphi y + z &= 0 \\ x + y - \varphi z = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \varphi x \\ z = \varphi^2 x \\ (1 + \varphi - \varphi^3)x = 0 \end{cases}$$

Par construction, $1 + \varphi - \varphi^3 = 0$.

Le système est donc équivalent à : $\begin{cases} y = \varphi x \\ z = \varphi^2 x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$

Donc $E_\varphi(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = \varphi x \text{ et } z = \varphi^2 x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \varphi x \\ \varphi^2 x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$.

Ainsi, $E_\varphi(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi^2 \end{pmatrix} \right)$.

ll est non nul, ce qui confirme que φ est valeur propre de A (c'est la seule possible d'après ce qu'on a vu au début).
Le sous-espace propre de A associé à φ est $E_\varphi(A)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi^2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_\varphi(A)$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$.

c)$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $dimE_\varphi(A) = 1 < 3$.
Donc A n'est pas diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

9)a)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$au + bv + cw = 0 \Longleftrightarrow a\big(1, \varphi, \varphi^2\big) + b\left(-\varphi^2, 1, 0\right) + c\left(-\varphi, 0, 1\right) = (0,0,0)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a - \varphi^2 b - \varphi c & = 0 \\ \varphi a + b & = 0 \\ \varphi^2 a + c & = 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1+2\varphi^3)a = 0 \\ b = -\varphi a \\ c = -\varphi^2 a \end{cases}$$

Comme $1 + 2\varphi^3 \neq 0$, la première équation donne $a = 0$, puis $b = c = 0$.

Donc la famille (u, v, w) est libre. Son cardinal coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{C}$ est : $Q = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi^2 & -\varphi \\ \varphi & 1 & 0 \\ \varphi^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b)Le vecteur colonne de $\Phi(u)$ dans la base canonique est :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^2 \\ 1+\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi(u) = \big(\varphi, \varphi^2, \varphi^3\big)$.

Le vecteur colonne de $\Phi(v)$ dans la base canonique est :

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi(v) = \big(1, 0, 1 - \varphi^2\big)$.

Le vecteur colonne de $\Phi(w)$ dans la base canonique est :

$$AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\varphi \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi(w) = (0, 1, -\varphi)$.

On remarque que $\Phi(u) = \varphi u$.

En utilisant 4)b), on a : $\Phi(v) = \big(1, 0, 1 - \varphi^2\big) = \left(1, 0, -\dfrac{1}{\varphi}\right) = -\dfrac{1}{\varphi} w$.

Enfin, $\Phi(w) = v - \varphi w$.

c)On vient de prouver précédemment que :

$\Phi(u) = \varphi u + 0v + 0w, \quad \Phi(v) = 0u + 0v - \dfrac{1}{\varphi}w, \quad \Phi(w) = 0u + 1v - \varphi w.$

La matrice de Φ dans la base $\mathscr{C} = (u, v, w)$ est donc : $A' = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix}$.

La formule de changement de base pour Φ donne alors :
$A' = Q^{-1}AQ$, c'est-à-dire : $A = QA'Q^{-1}$.
Cela mène au résultat demandé puisqu'on reconnaît en bas à droite de A' un bloc 2×2 correspondant à la matrice B.

On conclut que $A = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}$.

d)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $A^n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}$ ».

$Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^0}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} = Q \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) Q^{-1} = QIQ^{-1} = I = A^0.$
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \qquad \text{par HR et 9)c)} \\ &= Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \\ &= Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^{n+1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^{n+1}}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \qquad \text{par un calcul par blocs} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}$

> Remarque
> Dans l'hérédité, j'ai utilisé un calcul de produit par blocs. Ce n'est pas au programme de la classe, mais vous pouvez le visualiser facilement en explicitant les coefficients de B et B^n.

Partie D (suite de Padovan)

10)a)$U_3 = U_1 + U_0 = 1 + 1 = 2$,
$U_4 = U_2 + U_1 = 1 + 1 = 2$,
$U_5 = U_3 + U_2 = 2 + 1 = 3$,
$U_6 = U_4 + U_3 = 2 + 2 = 4$
$U_7 = U_5 + U_4 = 3 + 2 = 5$.

b)De l'égalité **(1)** $U_{n+3} = U_{n+1} + U_n$, on peut en déduire deux autres en translatant n :

(2) $U_{n+2} = U_n + U_{n-1}$ et **(3)** $U_{n+1} = U_{n-1} + U_{n-2}$.

(1)-(2) donne : $U_{n+3} - U_{n+2} = U_{n+1} - U_{n-1}$.

Puis en utilisant **(3)** :

$U_{n+3} - U_{n+2} = (U_{n-1} + U_{n-2}) - U_{n-1} = U_{n-2}$.

Ces calculs ne sont valides que pour $n \geq 2$.

On a bien prouvé que $\forall n \geq 2,\ U_{n+3} - U_{n+2} = U_{n-2}$.

c)L'égalité précédente translatée en faisant $n \to n - 2$ donne :
$\forall n \geq 4,\ U_{n+1} - U_n = U_{n-4} > 0$.

Donc la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante à partir de l'indice 4.

C'est une suite strictement croissante d'entiers, elle tend donc vers $+\infty$.

11)a)$X_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbf{N},\ AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ U_n + U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ U_{n+3} \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

b)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $X_n = A^n X_0$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $X_0 = A^0 X_0 = IX_0$ ». C'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrosn que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \quad \text{d'après 11)a)} \\ &= A\left(A^n X_0\right) \quad \text{par HR}. \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n = A^n X_0$.

12)Les questions 9)d) et 11)b) donnent pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$X_n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} X_0,$$

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans le membre de droite, les produits successifs donnent une matrice colonne dont le premier coefficient doit valoir U_n. Aussi, seule la première ligne de Q^{-1} est importante ici.

Elle est donnée par l'énoncé. On a donc en reportant :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2\varphi+3} & \frac{\varphi^2}{2\varphi+3} & \frac{\varphi}{2\varphi+3} \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En reprenant les notations de la question 7), on a :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & d_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \frac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels qu'on ne sait pas calculer, puis on obtient par produit :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \frac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \times \varphi^n \\ \alpha a_n + \beta b_n \\ \alpha c_n + \beta d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi^2 & -\varphi \\ \varphi & 1 & 0 \\ \varphi^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n \times \frac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \\ \alpha a_n + \beta b_n \\ \alpha c_n + \beta d_n \end{pmatrix}.$$

En calculant la première ligne du produit de droite, on déduit finalement :

$U_n = \dfrac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \times \varphi^n - \varphi^2 (\alpha a_n + \beta b_n) - \varphi (\alpha c_n + \beta d_n)$.

Posons $\epsilon_n = -\varphi^2 (\alpha a_n + \beta b_n) - \varphi (\alpha c_n + \beta d_n)$.

On a alors : $U_n = \dfrac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \times \varphi^n + \epsilon_n$.

Les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) convergent vers 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Et $1+\varphi^2+\varphi = \varphi^5$ d'après la question 4)b).

On conclut qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ tendant vers 0 quand $n \to +\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = \frac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^n + \epsilon_n.$$

> Remarque
>
> On peut prouver que $Q^{-1} = \dfrac{1}{2\varphi+3} \begin{pmatrix} 1 & \varphi^2 & \varphi \\ -\varphi & \varphi+2 & -\varphi^2 \\ -\varphi^2 & -\varphi^4 & 2+\varphi \end{pmatrix}$.
>
> Seule la première ligne de Q^{-1} était utile ici.

Partie E (étude d'une série)

13)De la question précédente, on tire : $U_n = \dfrac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^n \left(1 + \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \dfrac{\epsilon_n}{\varphi^n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n$ car $\varphi > 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \dfrac{\epsilon_n}{\varphi^n}\right) = 1$.

On conclut que $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^n$.

On a donc $U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^{n+1}$, puis par quotient : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \underset{+\infty}{\sim} \varphi$.

Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \varphi$.

14)De l'équivalent précédent, on tire par inverse : $\dfrac{1}{U_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$ converge car série géométrique de paramètre $\dfrac{1}{\varphi} \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$ qui a même nature est donc convergente aussi.

D'après le critère d'équivalence sur les séries, $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{U_n}$ converge.

15)Soit $n \geq 4$.
La question 10)b) donne : $\forall k \geq 2,\ U_{k+3} - U_{k+2} = U_{k-2}$.
En sommant ces égalités pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, on a :
$\sum\limits_{k=2}^{n-2} (U_{k+3} - U_{k+2}) = \sum\limits_{k=2}^{n-2} U_{k-2}$, puis par télescopage : $U_{n+1} - U_4 = \sum\limits_{k=2}^{n-2} U_{k-2}$

Or, $U_4 = 2$ et $\sum\limits_{k=2}^{n-2} U_{k-2} = \sum\limits_{j=0}^{n-4} U_j$ en posant $j = k-2$.

On conclut que $\forall n \geq 4,\ U_{n+1} = 2 + \sum\limits_{k=0}^{n-4} U_k$.

16)a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\forall k \in [\![0, n]\!],\ U_k \geq \varphi^{k-4}$ ».
$\mathscr{P}(4)$ s'écrit : « $\forall k \in [\![0, 4]\!]\ U_k \geq \varphi^{k-4}$ ».
Pour $k = 0$: $\varphi^{-4} = \varphi - 1 \leq 1 = U_0$.
Pour $k = 1$: $\varphi^{-3} = \dfrac{1}{\varphi^3} = \dfrac{1}{\varphi+1} \leq 1 = U_1$.
Pour $k = 2$: $\varphi^{-2} = \dfrac{1}{\varphi^2} \leq 1 = U_2$.
Pour $k = 3$: $\varphi^{-1} = \dfrac{1}{\varphi} \leq 1 = U_3$.

Pour $k=4$: $\varphi^0 = 1 \leq 2 = U_4$.

Donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

Soit $n \geq 4$ entier. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ U_k \geq \varphi^{k-4}$.

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-4$, on a :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} U_k \geq \sum_{k=0}^{n-4} \varphi^{k-4}$, puis en utilisant la question 15) : $U_{n+1} \geq 2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} \varphi^{k-4}$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} \varphi^{k-4} = \varphi^{-4}\sum_{k=0}^{n-4} \varphi^k = \varphi^{-4} \times \frac{\varphi^{n-3}-1}{\varphi-1} = \varphi^{n-3} - 1.$

En reportant dans l'inégalité du dessus, on a : $U_{n+1} \geq 2 + \varphi^{n-3} - 1 \geq \varphi^{n-3}$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \geq 4, \forall k \in [\![0,n]\!],\ U_k \geq \varphi^{k-4}$.

> Remarque
> Plus simplement, cela revient à dire que $\forall k \in \mathbf{N},\ U_k \geq \varphi^{k-4}$.

b)On déduit par inverse : $\forall k \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{U_k} \leq \dfrac{1}{\varphi^{k-4}}$ ou encore $\dfrac{1}{U_k} \leq \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{k-4}$.

Les séries de terme général $\dfrac{1}{U_k}$ et $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{k-4}$ étant convergentes, on peut sommer les inégalités précédentes pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{U_k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{k-4}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{k-4} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{j+n-3} \qquad \text{en posant } j = k-n-1 \\
&= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-3} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{j} \\
&= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\varphi}} \\
&= \frac{1}{\varphi^{n-3}} \times \frac{\varphi}{\varphi-1} \\
&= \frac{1}{\varphi^{n-8}} \quad \text{car } \varphi - 1 = \varphi^{-4} \text{ d'après 4)b).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N},\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{U_k} \leq \frac{1}{\varphi^{n-8}}$.

$$17)a)\ \frac{1}{\varphi^{n-8}} \leq 10^{-r} \iff \ln\left(\frac{1}{\varphi^{n-8}}\right) \leq \ln\left(10^{-r}\right)$$
$$\iff -(n-8)\ln\varphi \leq -r\ln 10$$
$$\iff (n-8)\ln\varphi \geq r\ln 10$$
$$\iff n-8 \geq \frac{r\ln 10}{\ln\varphi}$$
$$\iff n \geq 8+\frac{r\ln 10}{\ln\varphi}.$$

b)Par découpage de la somme, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$.

On déduit : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$.

Lav question 16)b) donne alors : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}\right| \leq \frac{1}{\varphi^{n-8}}$.

Pour que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}$ soit une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près, il suffit donc de prendre n tel que $\dfrac{1}{\varphi^{n-8}} \leq 10^{-r}$, soit $n \geq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln\varphi}$ $\quad(*)$

Par ailleurs, de l'encadrement $\varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$, on déduit :

$\ln(\varphi_{min}) \leq \ln\varphi \leq \ln(\varphi_{max})$

$\dfrac{1}{\ln(\varphi_{max})} \leq \dfrac{1}{\ln\varphi} \leq \dfrac{1}{\ln(\varphi_{min})}$

$\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{max})} \leq \dfrac{r\ln 10}{\ln\varphi} \leq \dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$

$8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{max})} \leq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln\varphi} \leq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$ $\quad(**)$

Compte tenu de $(*)$ et $(**)$, il suffit de prendre $n \geq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$.

Comme $8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$ n'est pas un entier, il faut arrondir à l'entier supérieur.

En posant $p = 1+\left\lfloor 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}\right\rfloor$, on peut conclure alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}U_k$ est une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près.

> Remarque
> $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$ s'appelle le reste de la série.

Partie F (informatique)

18)Fonction f :

```
def f(x):
    y=x**3-x-1
    return y
```

19)Fonction plastique :

```
def plastique(alpha):
    a=1
    b=2
    while b-a>10**-alpha:
        c=(a+b)/2
        if f(c)<0:
            a=c
        if f(c)>0:
            b=c
    return c
```

20)Fonction Padovan :

```
def padovan(n):
    liste=[1,1,1]
    for i in range(3, n+1):
        liste.append(liste[i-3]+liste[i-2])
    return liste[n]
```

21)Fonction serie :

```
def serie(r):
    p=1+int(np.floor(8+r*np.log(10)/np.log(1.32)))
    liste = []
    for i in range(p):
        liste.append(1/padovan(i))
    return sum(liste)
```

> Remarque
> La valeur exacte de φ est donnée par la formule du mathématicien Cardan.
>
> $$\varphi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \approx 1,32.$$

Exercice (edhec 2018)

1)a)La formule des probabilités totales pour le sce (A_0, A_1, A_2) s'écrit :

$$\begin{aligned}P(X=1) &= P(P_1)\\ &= P_{A_0}(P_1)P(A_0) + P_{A_1}(P_1)P(A_1) + P_{A_1}(P_1)P(A_2)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b)Soit $n \geq 2$. La même formule des probabilités totales donne :

$$P(X=n) = P_{A_0}(X=n)\times\frac{1}{3} + P_{A_1}(X=n)\times\frac{1}{3} + P_{A_1}(X=n)\times\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}P_{A_0}(X=n) &= P_{A_0}(F_1\cap ...\cap F_{n-1}\cap P_n)\\ &= P_{A_0}(F_1)\times\cdots\times P_{A_0}(F_{n-1})\times P_{A_0}(P_n) \quad \text{par indépendance des lancers}\\ &= \frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

$P_{A_1}(X=n) = P_{A_1}(F_1\cap ...\cap F_{n-1}\cap P_n) = 0$ car aucun pile ne peut être réalisé avec la pièce 1, puisqu'elle fait toujours face.

$P_{A_2}(X=n) = P_{A_2}(F_1\cap ...\cap F_{n-1}\cap P_n) = 0$ car aucun face ne peut être réalisé avec la pièce 1, puisqu'elle fait toujours pile.

On déduit que $\forall n \geq 2,\ P(X=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c)$X(\Omega) = \mathbf{N}$. La famille d'événements $(X=n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc un sce.

On déduit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}P(X=0) &= 1 - P(X=1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)\\ &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \quad \text{en posant } k=n-2\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2)• X admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ est absolument convergente, ou convergente puisque $nP(X=n)\geq 0$.

$\forall n\geq 2,\ nP(X=n) = n\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{6}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série dérivée première convergente.

La série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ est de même nature donc convergente.

Donc X admet une espérance.

• $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= 0P(X=0) + 1P(X=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1. \end{aligned}$$

3)• D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)P(X=n)$ est absolument convergente, ou convergente puisque $n(n-1)P(X=n)\geq 0$.

$\forall n\geq 2,\ n(n-1)P(X=n) = n(n-1)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{12}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

$\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ est une série dérivée seconde convergente.

Elle est donc convergente.

La série $\sum_{n\geq 0} n(n-1)P(X=n)$ est de même nature donc convergente.

Donc $X(X-1)$ admet une espérance.

• $E\big(X(X-1)\big) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$

$$= \frac{1}{12}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

• L'égalité $X^2 = X(X-1) + X$ montre que X^2 admet une espérance.

Par linéarité, $E\big(X^2\big) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) = \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{7}{3}$.

X admet donc une variance donnée par la formule de Koenig :

$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = \dfrac{7}{3} - 1^2 = \dfrac{4}{3}$.

4)C'est une histoire de symétrie. Si dans les questions 1)a) et 1)b), on change X en Y, cela revient à échanger pile et face, ce qui mène aux mêmes calculs.
Donc Y suit la même loi que X.

5)a)Soit $j \geq 2$ un entier.

On a l'inclusion évidente : $\big((X=1)\cap(Y=j)\big) \subset (Y=j)$.

Réciproquement, supposons $(Y=j)$ réalisé. Cela signifie que la premier face est apparu au j-ème lancer. Comme $j \geq 2$, cela impose que le premier lancer est pile, ce qui réalise $(X=1)$.
Donc $(Y=j) \subset \big((X=1)\cap(Y=j)\big)$.

On conclut que $\big((X=1)\cap(Y=j)\big) = (Y=j)$, puis en passant à la probabilité :

$\forall j \geq 2,\ P\big((X=1)\cap(Y=j)\big) = P(Y=j)$.

b)C'est exactement le même raisonnement en échangeant le role de pile et face.

Donc $\forall j \geq 2,\ P\big((X=i)\cap(Y=1)\big) = P(X=i)$.

6)a)Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbf{N}$.

• $(X+Y=0) = (X=0)\cap(Y=0)$ est un événement impossible car il se réalise si on ne fait jamais pile et jamais face !

• L'événement $(X+Y=2)$ est la réunion des 3 événements incompatibles :

$\big(\underbrace{(X=0)}_{0\text{ pile}} \cap \underbrace{(Y=2)}_{P_1\cap F_2}\big)$, $\big(\underbrace{(X=1)}_{P_1} \cap \underbrace{(Y=1)}_{F_1}\big)$, $\big(\underbrace{(X=2)}_{F_1\cap P_2} \cap \underbrace{(Y=0)}_{0\text{ face}}\big)$

L'événement $(X+Y=2)$ est donc impossible.

• Ainsi, $X+Y$ ne peut pas prendre la valeur 0 ou 2. Les autres valeurs entières sont en revanche possibles.
Par exemple, si on lance la pièce 1, les événements $(X=0)$ et $(Y=1)$ sont réalisés. Donc $X+Y=1$.
Et pour $n \geq 3$, on peut par exemple réaliser l'événement $(X+Y=n)$ en lançant la pièce 0 et en faisant $P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{n-2} \cap F_{n-1}$ (on a : $X=1$ et $Y=n-1$).
b)$(X+Y=1) = \big((X=0)\cap(Y=1)\big) \cup \big((X=1)\cap(Y=0)\big)$.
Or, $(X=0) \subset (Y=1)$ car si l'on ne fait jamais pile, on fait nécessairement face au premier lancer.
Donc $\big((X=0)\cap(Y=1)\big) = (X=0)$.
De même, $(Y=0) \subset (X=1)$ donc $\big((X=1)\cap(Y=0)\big) = (Y=0)$.
Ainsi, $(X+Y=1) = (X=0)\cup(Y=0)$.
Les événements $(X=0)$ et $(Y=0)$ sont incompatibles.
Donc $P(X+Y=1) = P(X=0)+P(Y=0) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
c)On peut remarquer que $\big((X=1),(Y=1)\big)$ est un système complet.
En effet, on a : $(X=1)\cap(Y=1)=\emptyset$.
De plus, on a : $(X=1)\cup(Y=1)=\Omega$, puisqu'au premier lancer on fait soit pile, ce qui réalise $(X=1)$, soit face, ce qui réalise $(Y=1)$.
On déduit pour tout entier $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}(X+Y=n) &= \big((X+Y=n)\cap(X=1)\big) \cup \big((X+Y=n)\cap(Y=1)\big)\\ &= \big((X=1)\cap(Y=n-1)\big) \cup \big((X=n-1)\cap(Y=1)\big).\end{aligned}$$

d)On déduit :

$$\begin{aligned}P(X+Y=n) &= P\big((X=1)\cap(Y=n-1)\big) + P\big((X=n-1)\cap(Y=1)\big)\\ &= P(Y=n-1)+P(X=n-1) \quad \text{grâce à 5) avec } n-1 \geq 2\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{grâce à 1)b)) avec } n-1 \geq 2\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

7)a)programme :

```
import numpy.random as rd
piece=rd.randint(0,3)
x=1
if piece==0:
    lancer=rd.randint(0,2)
    while lancer==0:
        lancer=rd.randint(0,2)
        x=x+1
if piece==1:
    x=0
print(x)
```

b)Si le joueur lance avec la pièce 2, elle fait nécessairement pile au premier lancer, ce qui donne x=1, valeur initialisée en deuxième ligne du programme.