Correction DM13

Exercice

1)On a $P(B_1) = 1/3$.

2)La formule des probabilités totales pour le système complet (B_1, N_1) donne :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P_{B_1}(B_2)P(B_1) + P_{N_1}(B_2)P(N_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

3)La formule des probabilités totales pour le système complet (B_k, N_k) donne :

$$\begin{aligned} P(B_{k+1}) &= P_{B_k}(B_{k+1})P(B_k) + P_{N_k}(B_{k+1})P(N_k) \\ &= \frac{2}{3}P(B_k) + \frac{1}{3}P(N_k) \\ &= \frac{2}{3}P(B_k) + \frac{1}{3}[1 - P(B_k)] \\ &= \frac{1}{3}P(B_k) + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4)La suite $\left(P(B_k)\right)_{1 \le k \le n}$ est arithmético-géométrique.

- On cherche le réel x tel que $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. On trouve $x = \frac{1}{2}$.
- On pose $V_k = P(B_k) - x = P(B_k) - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, n]\!],\ V_{k+1} &= P(B_{k+1}) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}P(B_k) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}P(B_k) - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}\left(P(B_k) - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}V_k. \end{aligned}$$

La suite $\left(V_k\right)_{1 \le k \le n}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

- On a donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ V_k = V_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(P(B_1) - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.
- On déduit : $P(B_k) = \frac{1}{2} + V_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$.

5)Supposons que N_1 soit réalisé.
On est alors avec $n - 1$ urnes $U_2, ..., U_n$ où U_2 contient 2 boules noires et 1 boule blanche, alors que les autres contiennent 1 boule noire et 1 boule blanche, ce qui revient à la configuration initiale avec $n \to n - 1$.

Donc $P_{N_1}(B_n) = P(B_{n-1})$.

6)• B_n est la réunion des événements incompatibles $B_1 \cap B_n$ et $N_1 \cap B_n$.
Donc par additivité, on a :
$P(B_n) = P(B_1 \cap B_n) + P(N_1 \cap B_n)$.

Puis, $P(B_1 \cap B_n) = P(B_n) - P(N_1 \cap B_n)$
$= P(B_n) - P(N_1)P_{N_1}(B_n)$
$= P(B_n) - \dfrac{2}{3}P(B_{n-1})$.

• N_1 est la réunion des événements incompatibles $N_1 \cap N_n$ et $N_1 \cap B_n$.
Donc par additivité, on a :
$P(N_1) = P(N_1 \cap N_n) + P(N_1 \cap B_n)$.

Puis, $P(N_1 \cap N_n) = P(N_1) - P(N_1 \cap B_n) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}P(B_{n-1})$.

7)L'événement « l'urne 1 n'a pas changé de composition à l'issue des n tirages » est la réunion des événements incompatibles $B_1 \cap B_n$ et $N_1 \cap N_n$.
Donc par additivité, la probabilité demandée est :

$$
\begin{aligned}
&P(B_1 \cap B_n) + P(N_1 \cap N_n)\\
&= \left(P(B_n) - \frac{2}{3}P(B_{n-1})\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}P(B_{n-1})\right)\\
&= P(B_n) - \frac{4}{3}P(B_{n-1}) + \frac{2}{3}\\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}.
\end{aligned}
$$