Exercice 1 (eml 2007)

Partie I

1)$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède une colonne de zéros donc $rg(A) < 3$.
Donc A n'est pas inversible.

2)A est triangulaire. Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 0, 1 et 4.
$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes. Donc elle est diagonalisable.

3)• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_0(A) \iff AU = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} y + 3z = 0 \\ 4z = 0 \end{array} \right. \iff y = z = 0.$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_1(A) \iff (A - I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} -x + y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y \ \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

• $E_4(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 4I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_4(A) \iff (A - 4I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} -4x + y + 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right. .$$

Donc $E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice dont les colonnes sont formées d'une base de chaque sous-espace propre.

Comme A est diagonalisable, elle s'écrit : $A = PDP^{-1}$.

• Déterminons P^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie II

1)Remarquons d'abord que $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$.

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff \left(PNP^{-1}\right)\left(PNP^{-1}\right) = PDP^{-1} \\ &\iff PN\underbrace{P^{-1}P}_{=I}NP^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff PN^2P^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff \underbrace{P^{-1}P}_{=I}N^2\underbrace{P^{-1}P}_{=I} = \underbrace{P^{-1}P}_{=I}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I} \\ &\iff N^2 = D. \end{aligned}$$

2)Supposons $N^2 = D$. Alors, $ND = NN^2 = N^3 = N^2N = DN$.

3)Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Supposons $N^2 = D$. On a alors $ND = DN$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } ND = DN &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} b = 0 \\ 4c = 0 \\ d = 0 \\ 4f = f \\ 4g = 0 \\ 4h = h \end{cases} \\ &\iff b = c = d = f = g = h = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si $ND = DN$, alors $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ donc diagonale.

4)Soit $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

$$N^2 = D \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} a^2 = 0 \\ e^2 = 1 \\ i^2 = 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ e = \pm 1 \\ i = \pm 2 \end{cases}$$

Les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$ sont donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5)Soit M est solution de l'équation (1), alors M est de la forme $M = PNP^{-1}$, où N est l'une des 4 matrices trouvées précédemment.

M et N étant semblables, elles ont les mêmes valeurs propres.
Or, on veut que les valeurs propres de M soient positives ou nulles.

Cela impose que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Et on a alors :

$$\begin{aligned} M &= PNP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie aisément que la matrice M trouvée vérifie $M^2 = A$.

Ainsi, la matrice B cherchée est unique et vaut $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie III

1)Posons $Q(X) = aX^2 + bX + c$.

$$\left\{\begin{array}{c} Q(0)=0 \\ Q(1)=1 \\ Q(4)=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} c=0 \\ a+b+c=1 \\ 16a+4b+c=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} c=0 \\ b=1-a \\ 16a+4(1-a)=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} c=0 \\ b=\dfrac{7}{6} \\ a=-\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$$

Donc $Q(X) = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X$.

2)En utilisant que $A = PDP^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A &= -\frac{1}{6}\left(PDP^{-1}\right)^2 + \frac{7}{6}PDP^{-1} \\ &= -\frac{1}{6}PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}PDP^{-1} \\ &= P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} \\ &= PQ(D)P^{-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Or, D est diagonale, D^2 également. Donc $Q(D)$ est diagonale.

Comme $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a : $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En reportant dans $(*)$, on a :

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = B \quad \text{(voir calcul fait en II.5)}$$

3)On procède par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $AF = FA$. Alors, $A^2F = AAF = AFA = FAA = FA^2$.

$$\begin{aligned} \text{On déduit : } BF &= \left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F \\ &= -\frac{1}{6}A^2F + \frac{7}{6}AF \\ &= -\frac{1}{6}FA^2 + \frac{7}{6}FA \\ &= F\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right) \\ &= FB. \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $BF = FB$. On utilise que $B^2 = A$.

Alors, $AF = B^2F = BBF = BFB = FBB = FB^2 = FA$.

On conclut que $AF = FA \iff BF = FB$.

Exercice 2 (eml 2007)

Préliminaire

1)g est la somme de deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ donc g est continue sur $]0,+\infty[$.

g est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2)g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g\left(]0,+\infty[\right) = \mathbf{R}$.
0 admet donc un unique antécédent α par g dans $]0,+\infty[$.
α est alors l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

3)$g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.25 - \ln 2 = 0.25 - 0.7 \approx -0.45$.

$g(1) = 1 + \ln 1 = 1$.

$g(\alpha) = 0$.

On déduit : $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1)$, soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ par stricte croissance de g.

Partie A

1)a)f est dérivable sur I comme somme et produit de fonctions dérivables sur I.

$\forall x \in I, f'(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4x} = \dfrac{-2x^2+4x-1}{4x}$.

Les racines de $-2x^2+4x-1$ sont $\dfrac{-4-\sqrt{8}}{-4} = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,7$

et $\dfrac{-4+\sqrt{8}}{-4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,3$.

On a $\forall x \in]0,3;1,7[\,, -2x^2+4x-1 > 0$. Donc $\forall x \in I, -2x^2+4x-1 > 0$.

Par ailleurs, $\forall x \in I, 4x > 0$.

Par quotient, $\forall x \in I, f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur I.

1)b)$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{4} > \frac{1}{2}$.
$f(1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln 1 = \frac{3}{4} < 1$.
Enfin, $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$ car f est strictement croissante sur I.
Donc $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

1)c)$\forall x \in I, f(x) \in f(I)$.
f étant continue et strictement croissante sur I, on a $f(I) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right]$, intervalle contenu dans I grâce à la question précédente.
Donc $\forall x \in I, f(x) \in I$.

2)a)$U_1 = f(U_0) = f(1) = \frac{3}{4}$.

2)b)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $\ll\ U_n \in I\ \gg$.

$U_0 \in I$ car $U_0 = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $U_n \in I$ donc $f(U_n) \in I$ grâce à 1)c).
Ce qui signifie que $U_{n+1} \in I$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \in I$.

2)c)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $\ll\ U_{n+1} \leq U_n\ \gg$.

$U_0 = 1$ et $U_1 = \frac{3}{4}$. Donc $U_1 \leq U_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $U_{n+1} \leq U_n$.
U_n et U_{n+1} sont des éléments de I. De plus, f est croissante sur I.
Donc $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$, c'est-à-dire $U_{n+2} \leq U_{n+1}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} \leq U_n$. Donc $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

2)d)$(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante est minorée par $\frac{1}{2}$ donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

On sait que $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$. Par passage à la limite : $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.
f est continue sur I donc en l.
D'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation $f(x) = x$.
Or, $f(x) = x \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha$.
Donc $l = \alpha$.

Partie B

1)a)Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.
Les fonctions $(x, y) \mapsto e^x$ et $(x, y) \mapsto \ln x$ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ en tant que fonctions usuelles.
Par somme et produit, F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.

F admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 données par :

$\partial_1 F(x, y) = e^y + \dfrac{y}{x} = \dfrac{xe^y + y}{x}$ et $\partial_2 F(x, y) = xe^y + \ln x$.

1)b)Les points critiques de F sont solution du système :

$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 F(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} xe^y & + & y & = & 0 \\ xe^y & + & \ln x & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} xe^y & + & y & = & 0 \\ & & y & = & \ln x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} xe^{\ln x} & + & \ln x & = & 0 \\ & & y & = & \ln x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 & + & \ln x & = & 0 \\ & & y & = & \ln x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} g(x) & = & 0 \\ y & = & \ln x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \alpha \\ y & = & \ln \alpha \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \alpha \\ y & = & -\alpha^2 \end{array} \right.$$

Donc F admet $(\alpha, -\alpha^2) = (\alpha, \ln \alpha)$ comme seul point critique.

2)F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. Elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 données par :

$\partial^2_{1,1} F(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}$,

$\partial^2_{1,2} F(x,y) = \partial^2_{2,1} F(x,y) = e^y + \dfrac{1}{x}$,

$\partial^2_{2,2} F(x,y) = xe^y$.

La matrice hessienne de F au point (x,y) est : $\nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & e^y + \dfrac{1}{x} \\ e^y + \dfrac{1}{x} & xe^y \end{pmatrix}$.

On déduit : $\nabla^2 F(\alpha, \ln \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} & \alpha^2 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\nabla^2 F(\alpha, \ln \alpha)$

$\Longleftrightarrow \nabla^2 F(\alpha, \ln \alpha) - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} & \alpha^2 - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow (1-\lambda)\left(\alpha^2 - \lambda\right) - \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - \left(1+\alpha^2\right)\lambda + \alpha^2 - \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - \left(1+\alpha^2\right)\lambda - 2 - \dfrac{1}{\alpha^2} = 0.$

L'équation admet deux racines dont le produit vaut :

$\lambda_1 \lambda_2 = \dfrac{c}{a} = -2 - \dfrac{1}{\alpha^2} < 0.$

Les valeurs propres de $\nabla^2 F(\alpha, \ln \alpha)$ sont donc non nulles et de signes contraires.
F ne possède donc pas d'extrémum local en $(\alpha, \ln \alpha)$ (c'est un col).

Exercice 3 (eml 2022)

Partie A

1)$X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $Y = X + 1$ donc $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$.
$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(Y = k) = P(X = k - 1) = q^{k-1}p$.
On conclut que $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

2)Le cours donne : $E(Y) = \dfrac{1}{p}$ et $V(Y) = \dfrac{q}{p^2}$.

On déduit : $E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p} = \dfrac{q}{p}$.

$V(X) = V(Y-1) = V(Y) = \dfrac{q}{p^2}$.

3)Programme :

```
def simule_X(p):
    Y=1
    while rd.random()>p:
        Y=Y+1
    X=Y-1
    return X
```

Partie B

4)Programme :

```
def simule_Z(n,p):
    Z=1
    for i in range(n):
        s=0
        for j in range(Z):
            s=s+simule_X(p)
        Z=s
    return Z
```

5)a)$u_0 = P(Z_0 = 0) = 0$ car Z_0 est certaine et égale à 1.

$u_1 = P(Z_1 = 0) = P(X = 0) = p$ (en effet, Z_1 et X ont la même loi).

b)Supposons l'événement $(Z_n = 0)$ est réalisé.
Cela signifie qu'après la n-ème activation, le joueur n'a plus de jeton.
A la $n+1$-ème activation, le joueur ne peut donc pas introduire de jeton dans la machine. Après la $n+1$-ème activation, la machine ne rend rien au joueur qui reste toujours sans jeton et l'événement $(Z_{n+1} = 0)$ est réalisé.

On a donc : $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$.

Par croissance de la probabilité, on déduit : $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$, c'est-à-dire : $u_n \leq u_{n+1}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

En tant que probabilité, on a $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq 1$.

D'après le théorème de la limite monontone, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

6)L'événement R est réalisé si et seulement si l'un au moins des événements $(Z_n = 0)$ est réalisé.
Ainsi, $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (Z_n = 0)$.

La suite d'événements $\big((Z_n = 0)\big)_{n\geq 1}$ étant croissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone s'applique et donne :

$$P(R) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

7)a)Supposons l'événement $(Z_1 = k)$ réalisé.
Alors, la machine rend k jetons au joueur après la 1ère activation.
Ces k jetons sont remis dans la machine par le joueur, lors de la 2ème activation.
L'événement $(Z_2 = 0)$ est alors réalisé si la machine ne reverse aucun jeton au joueur.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } P_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) &= P\left(X_1 + \cdots + X_k = 0\right) \\
&= P\big((X_1 = 0) \cap ... \cap (X_k = 0)\big) \quad \text{car } X_i \geq 0 \\
&= P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_k = 0) \quad \text{par indépendance} \\
&= P(X = 0) \times \cdots \times P(X = 0) \quad \text{car } X_i \text{ a même loi que } X \\
&= \big(P(X = 0)\big)^k \\
&= \big(P(Z_1 = 0)\big)^k \quad \text{car } X \text{ et } Z_1 \text{ ont même loi} \\
&= (u_1)^k.
\end{aligned}$$

b)Soit $n \in \mathbf{N}$.
• La formule des probabilités totales pour le sce $\big((Z_1 = k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ donne :

$$P\left(Z_{n+1} = 0\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(Z_1 = k\right) P_{(Z_1=k)}\left(Z_{n+1} = 0\right)$$

c'est-à-dire : $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(Z_1 = k\right) \left(u_n\right)^k$.

• Comme $P\left(Z_1 = k\right) = P(X = k) = q^k p$, on déduit :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p \left(u_n\right)^k = p\sum_{k=0}^{+\infty} \left(qu_n\right)^k = p \times \frac{1}{1 - qu_n} = \frac{p}{1 - qu_n}.$$

Remarque
La série géométrique ci-dessus converge car $0 < q < 1$ et $0 \leq u_n \leq 1$, ce qui entraîne : $0 < qu_n < 1$.

8)a)Un passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{p}{1 - qu_n}$ donne :

$l = \dfrac{p}{1 - ql}$.

$$\begin{aligned}\text{Or, } (l-1)(ql-p)=0 &\Longleftrightarrow ql^2-pl-ql+p=0\\ &\Longleftrightarrow ql^2-\underbrace{(p+q)}_{=1}l+p=0\\ &\Longleftrightarrow l-ql^2=p\\ &\Longleftrightarrow l(1-ql)=p\\ &\Longleftrightarrow l=\frac{p}{1-ql}.\end{aligned}$$

Donc $(l-1)(ql-p)=0$.

b)On suppose $p \geq \dfrac{1}{2}$. On a alors $q=1-p\leq \dfrac{1}{2}$, puis $\dfrac{1}{q}\geq\ 2$.

Par produit, $\dfrac{p}{q}\geq 1 \quad (*)$

Par ailleurs, l'égalité 8)a) donne $l-1=0$ ou $ql-p=0$, c'est-à-dire $l=1$ ou $l=\dfrac{p}{q}$.

La condition $l=\dfrac{p}{q}$ entraîne que $l\geq 1$ grâce à $(*)$.

Enfin, comme l est une probabilité, $l\leq 1$. D'où $l=1$.

D'après la question 6), on conclut que $P(R)=1$.

c)• u_n étant une probabilité, on a déjà $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n\geq 0$.

On fait une récurrence pour montrer l'autre inégalité.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n\leq \frac{p}{q}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $u_0=0$.

Soit $n\in\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par HR, on a : $u_n\leq\frac{p}{q}$. On déduit successivement :

$qu_n\leq p$

$-p\leq -qu_n$

$1-p\leq 1-qu_n$

$\dfrac{1}{1-qu_n}\leq\dfrac{1}{1-p}$ $\quad$ par décroissance de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$

$\dfrac{p}{1-qu_n}\leq\dfrac{p}{1-p}$, c'est-à-dire $u_{n+1}\leq\dfrac{p}{q}$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n\in\mathbf{N},\ 0\leq u_n\leq\dfrac{p}{q}$.

• Un passage à la limite dans l'inégalité $u_n\leq\dfrac{p}{q}$ donne : $l\leq\dfrac{p}{q} \quad (1)$

Comme $p<\dfrac{1}{2}$, on a : $q=1-p>\dfrac{1}{2}$, puis $\dfrac{1}{q}<2$.

Par produit, $\dfrac{p}{q}<1 \quad (2)$

En recollant (1) et (2), on a : $l<1$, c'est-à-dire $P(R)<1$.

d)Pour que la machine soit rentable, le casino préfère que les joueurs finissent par ne plus avoir de jeton. C'est ce qui se produit lorsque $P(R)=1$, c'est-à-dire $p\geq\dfrac{1}{2}$.

Partie C

9)• Soit $n \in \mathbf{N}$.
Supposons l'événement $(Z_n = 0)$ réalisé.
Cela signifie qu'après n activations, le joueur n'a plus de jeton.

Ce peut être :
− la première fois que cela se produit, auquel cas, $T = n$,
− au moins la deuxième fois que cela se produit, auquel cas $T < n$.

Dans tous les cas, l'événement $(T \leq n)$ est réalisé donc $(Z_n = 0) \subset (T \leq n)$.

Réciproquement, supposons l'événement $(T \leq n)$ réalisé.
Alors, T prend une valeur $k \in [\![1, n]\!]$.
Après k activations, le joueur n'a plus de jeton et reste dans cette situation jusqu'à la fin de la n-ème activation, ce qui réalise l'événement $(Z_n = 0)$.
Donc $(T \leq n) \subset (Z_n = 0)$.

On conclut que les événements $(T \leq n)$ et $(Z_n = 0)$ sont égaux.

On a donc $u_n = P(Z_n = 0) = P(T \leq n)$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Comme T prend des valeurs entières, on a : $T \leq n \Longleftrightarrow T \leq n-1$ ou $T = n$.

Ainsi, l'événement $(T \leq n)$ est la réunion des événements incompatibles $(T \leq n-1)$ et $(T = n)$.

Donc $P(T \leq n) = P(T \leq n-1) + P(T = n)$, ce qui donne :

$u_n = u_{n-1} + P(T = n)$, soit $1 - v_n = 1 - v_{n-1} + P(T = n)$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(T = n) = v_{n-1} - v_n$.

10)Les égalités ci-dessus donnent $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ nP(T = n) = nv_{n-1} - nv_n$.
En sommant ces égalités pour $n \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} nP(T = n) &= \sum_{n=1}^{N} (nv_{n-1} - nv_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \big((n-1)v_{n-1} - nv_n + v_{n-1}\big) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \big((n-1)v_{n-1} - nv_n\big) + \sum_{n=1}^{N} v_{n-1}
\end{aligned}$$

Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \big((n-1)v_{n-1} - nv_n\big) = 0v_0 - Nv_N = -Nv_N$.

En posant $i = n-1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_{n-1} = \sum_{i=0}^{N-1} v_i = \sum_{n=0}^{N-1} v_n$ en renommant i en n.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(T = n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N$.

11)a)La question 7)b) avec $p = \dfrac{1}{2}$ donne : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}u_n} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

Ce qui incite à faire une récurrence...

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 0$ d'après 5)a).

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{2-u_n} \\
&= \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} \quad \text{par HR} \\
&= \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b)On déduit : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = 1 - u_n = 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

La question 10) donne alors pour tout $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} nP(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \frac{N}{N+1}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{i}$ diverge (série harmonique) et elle est formée de termes positifs. Sa somme partielle tend donc vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{i} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{N}{N+1} = 1$.

Par différence, $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} nP(T=n) = +\infty$.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} nP(T=n)$ est donc divergente. Ainsi, T n'a pas d'espérance.

12)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \frac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q}-u_{n+1}} \\
&= \frac{1-\frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q}-\frac{p}{1-qu_n}} \quad \text{d'après 7)b)} \\
&= \frac{\frac{1-qu_n-p}{1-qu_n}}{\frac{p(1-qu_n)-pq}{q(1-qu_n)}} \\
&= \frac{q(1-qu_n-p)}{p(1-qu_n)-pq} \\
&= \frac{q(1-p-qu_n)}{p(1-q-qu_n)}
\end{aligned}$$

On poursuit le calcul en remarquant que $1-p=q$ et $1-q=p$, ce qui donne :
$w_{n+1}=\dfrac{q(q-qu_n)}{p(p-qu_n)}=\dfrac{q}{p}\times\dfrac{q(1-u_n)}{p-qu_n}=\dfrac{q}{p}\times\dfrac{1-u_n}{\frac{p-qu_n}{q}}=\dfrac{q}{p}\times\dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$.

Donc $\forall n\in\mathbf{N},\ w_{n+1}=\dfrac{q}{p}w_n$.

b)• La suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{q}{p}$.

Donc $\forall n\in\mathbf{N},\ w_n=w_0\left(\dfrac{q}{p}\right)^n=\dfrac{1-u_0}{\frac{p}{q}-u_0}\times\left(\dfrac{q}{p}\right)^n=\dfrac{q}{p}\times\left(\dfrac{q}{p}\right)^n=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$.

Par ailleurs, à partir de l'égalité $w_n=\dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$, on exprime u_n en fonction de w_n :

$$\begin{aligned}
w_n=\frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} &\iff w_n\left(\frac{p}{q}-u_n\right)=1-u_n\\
&\iff \frac{p}{q}w_n-w_nu_n=1-u_n\\
&\iff u_n-w_nu_n=1-\frac{p}{q}w_n\\
&\iff u_n(1-w_n)=1-\frac{p}{q}w_n\\
&\iff u_n=\frac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n}
\end{aligned}$$

En remplaçant w_n par $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$, on déduit : $u_n=\dfrac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n}=\dfrac{1-\frac{p}{q}\times\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$

Ainsi, $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$.

• $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n\leq 1$ donc $v_n\geq 0$.

De plus, comme $\dfrac{q}{p}>0$ on a : $1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}<1$, puis $\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}}>1$.

En multipliant membre à membre par $1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^n>0$, on a :

$\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}>1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$, c'est-à-dire : $u_n>1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$, soit $v_n<\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

On conclut que $\forall n\in\mathbf{N},\ 0\leq v_n\leq\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

c)La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{q}{p}\right)^n$ est une série géométrique de paramètre $\dfrac{q}{p}$.

Elle converge car $0 < \dfrac{q}{p} < 1$ du fait que $p > \dfrac{1}{2}$.

On sait de plus que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq v_n \leq \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge.

De plus, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}} \quad (1)$

On a donc : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \quad (2)$

De plus, on a $\forall N \in \mathbf{N},\ 0 \leq N v_N \leq N \left(\dfrac{q}{p}\right)^N$.

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty} N \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0$ par croissances comparées.

Par la propriété des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} N v_N = 0 \quad (3)$

En utilisant la question 10, ainsi que les points (2) et (3), on conclut par passage à la limite quand $N \to +\infty$:

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} nP(T=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

La série $\sum_{n\geq 1} nP(T=n)$ est donc convergente (et même absolument convergente, puisque son terme général est positif), ce qui signifie que T admet une espérance.

Enfin, $\displaystyle E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(T=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$, grâce à (1).

13)De façon à ne pas mettre de frein à l'espérance de T (= nombre moyen d'activations avec jetons), le casino a intérêt à ce que la quantité $\dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$ soit la plus grande possible, ce qui se produit si $\frac{q}{p} \approx 1$, c'est-à-dire $p \approx \dfrac{1}{2}$.