Chapitre 2 : applications linéaires

I)Application linéaire

Déf : soient E et F deux espaces vectoriels, soit $f : E \to F$ une application.
On dit que f est une *application linéaire* (ou morphisme) de E dans F si :

- $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, f\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = f\left(\overrightarrow{u}\right) + f\left(\overrightarrow{v}\right)$,
- $\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, f\left(\lambda \overrightarrow{u}\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right)$.

Ou ce qui est équivalent : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, f\left(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) + f\left(\overrightarrow{v}\right)$.

Déf : un *endomorphisme* f de E est une application linéaire f de E dans E.
Ainsi, f est un endomorphisme de $E \iff f$ est linéaire et $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ f(\overrightarrow{u}) \in E$.

Propriété 1
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On a alors $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$ et $\forall \overrightarrow{u} \in E, f\left(-\overrightarrow{u}\right) = -f\left(\overrightarrow{u}\right)$.

<u>Exercice 1</u>
Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (2x - 3y, x + 4y, x).$$

Montrer que f est une application linéaire.

II)Noyau d'une application linéaire

Déf : soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle *noyau* de f, noté $Kerf$, la partie de E, définie par :

$$Kerf = \left\{\overrightarrow{u} \in E, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O_F}\right\}.$$

Propriété 2
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. $Kerf$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 1
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. f est injective $\iff Kerf = \{O_E\}$.

<u>Exercice 2</u>
Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x + y - z).$$

Déterminer une base de $Kerf$ et sa dimension. f est-elle injective ?

<u>Exercice 3</u>
Soit f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie pour toute $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par :

$$f(M) = AM \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)Déterminer une base de $Kerf$.

III)Image d'une application linéaire

Déf : soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle *image* de f, noté Imf, la partie de F, définie par :

$$Imf = \{f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{u} \in E\}.$$

Propriété 3
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Imf est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 2
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. f est surjective $\Longleftrightarrow Imf = F$.

Théorème 3
Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Alors, $Imf = \text{Vect}\left(f(\overrightarrow{e_1}), ..., f(\overrightarrow{e_n})\right)$.

<u>Exercice 4</u>
Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (y - z, -x + z, x - y).$$

Déterminer par deux méthodes différentes une famille génératrice de Imf.

IV)Théorème du rang

Déf : soit $f : E \to F$ une application linéaire.
La dimension de Imf est appelée *rang* de f et notée $rg(f)$.
Ainsi, $rg(f) = dim(Imf)$.

Remarque

$$\begin{aligned} rg(f) = 0 &\Longleftrightarrow dim(Imf) = 0 \\ &\Longleftrightarrow Imf = \left\{\overrightarrow{O_F}\right\} \\ &\Longleftrightarrow \forall \overrightarrow{u} \in E,\ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O_F} \\ &\Longleftrightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Théorème 4 (théorème du rang)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire où E de dimension finie.
On a : $dimE = dimKerf + dimImf$.

<u>Exercice 5</u>
Soit A une matrice donnée de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Soit f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie pour toute $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par :

$$f(M) = AM - MA.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2) On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base de $Kerf$, sa dimension. En déduire le rang de f.

V)Isomorphisme, automorphisme

Déf : une application linéaire bijective est appelée *isomorphisme*.

Déf : un endomorphisme bijectif de E est appelé *automorphisme* de E.

Théorème 5
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On suppose que E et F ont même dimension (finie).
On a les équivalences : f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective.

> Remarque
> Tout endomorphisme injectif est un automorphisme.
> Tout endomorphisme surjectif est un automorphisme.

Propriété 4
Soit $f : E \to F$ un isomorphisme où E et F sont de dimension finie.
Alors, $dimE = dimF$.

<u>Exercice 6</u>
Soit f l'application de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_2[X], f(P) = \big(P(1), P'(1), P(0)\big).$$

1)Montrer que f est linéaire.

2) Justifier que f est un isomorphisme.

<u>Exercice 7</u>
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + 5y - 2z, -3x + y, x + 4y + 4z).$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$.

VI)Opérations sur les applications linéaires

Propriété 5
1)Si $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont linéaires, alors $f + g$ est linéaire.
2)Si $f : E \to F$ est linéaire, alors λf est linéaire ($\lambda \in \mathbf{R}$).
3)Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire.

Propriété 6
1)Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme.
2)Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme. De plus, on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

<u>Exercice 8</u>
Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + y + z).$$

Soit g l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ g(x, y) = (x + y, x - y).$$

Calculer $g \circ f$.