
DM4
à rendre le lundi / /

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

1)a) Etudier les variations de g_0 , définie sur $[0, +\infty[$ par $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

b) Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, puis donner l'allure de la courbe représentative de g_0 .

2)a) Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$:

$$g'_n(x) \geq 0 \iff n > 2 \ln(1+x).$$

b) En déduire les variations de g_n lorsque $n \geq 1$. Calculer soigneusement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

c) Montrer que pour $n > 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e} \right)^n,$$

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Soit Q le polynôme défini par $Q(X) = -X^3 + 5X^2 - 8X + 4$.

a) Vérifier que 1 est racine de Q , puis trouver toutes ses racines.

b) Montrer que Q est un polynôme annulateur de A .

c) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de A .
 A est-elle diagonalisable ?

2) Soient $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (4, 2, 1)$ et $v_3 = (4, 1, 0)$.

a) Montrer que $f(v_1) = v_1$ et que $f(v_2) = 2v_2$.

b) Trouver des réels a et b tels que $f(v_3) = av_2 + bv_3$.

c) Montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

d) Ecrire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.