Exercice 1 (ecricome 2012)

1)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $\ll\ U_n = L + A^n(U_0 - L)\ \gg$.

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : $\ll\ U_0 = L + A^0(U_0 - L)\ \gg$, soit $\ll\ U_0 = L + I(U_0 - L)\ \gg$, ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On a par construction :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= AU_n + B \\
&= A\big(L + A^n(U_0 - L)\big) + B, \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= AL + A^{n+1}(U_0 - L) + B \\
&= (AL + B) + A^{n+1}(U_0 - L) \\
&= L + A^{n+1}(U_0 - L).
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2)Notons $F = \{(x, y, z) \mid -x + y + z = 0\}$.

• $$\begin{aligned}
F &= \{(x, y, z) \mid x = y + z\} \\
&= \big\{(y + z, y, z), (y, z) \in \mathbf{R}^2\big\} \\
&= \big\{y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1), (y, z) \in \mathbf{R}^2\big\} \\
&= \text{Vect}\,\big((1, 1, 0), (1, 0, 1)\big).
\end{aligned}$$

• D'après le cours, $Im(b) = \text{Vect}\ (b(e_1), b(e_2), b(e_3))$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
B étant la matrice de b dans $\mathscr{B}$, les vecteurs $b(e_1), b(e_2), b(e_3)$ ont pour vecteur colonne les colonnes de B dans la base $\mathscr{B}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
Im(b) &= \text{Vect}\,\big((3, 1, 2), (-1, 0, -1), (-2, -1, -1)\big) \\
&= \text{Vect}\,\big((3, 1, 2), (-1, 0, -1)\big) \text{ car } (-2, -1, -1) = -(3, 1, 2) - (-1, 0, -1).
\end{aligned}$$

• De même, on a : $Im(Id-a) = \text{Vect}\,\big((Id-a)(e_1), (Id-a)(e_2), (Id-a)(e_3)\big)$.
Les vecteurs $(Id-a)(e_1), (Id-a)(e_2), (Id-a)(e_3)$ ont pour vecteur colonne les colonnes de $I - A$ dans la base $\mathscr{B}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
Im(Id - a) &= \text{Vect}\ \left(\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)\right) \\
&= \text{Vect}\,\big((3, 2, 1), (-1, 0, -1), (-3, -4, 1)\big) \text{ par colinéarité} \\
&= \text{Vect}\,\big((3, 2, 1), (-1, 0, -1)\big) \text{ car (-3,-4,1)=3(1,0,1)-2(3,2,1).}
\end{aligned}$$

• Comparons maintenant ces trois sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

$(3, 1, 2) \in F$ car $-3 + 1 + 2 = 0$. De même, $(-1, 0, -1) \in F$.
Comme F est un espace vectoriel, les combinaisons linéaires de $(3, 1, 2)$ et $(-1, 0, -1)$ restent dans F, prouvant que $\text{Vect}\,\big((3, 1, 2), (-1, 0, -1)\big) \subset F$, c'est-à-dire que $Im(b) \subset F$.
Par le même argument, on prouve que $Im(Id - a) \subset F$.

Montrons enfin les inclusions contraires.

$(1,1,0) = (3,1,2) + 2(-1,0,-1)$ donc $(1,1,0) \in Im(b)$,
$(1,0,1) = 0(3,1,2) - (-1,0,-1)$ donc $(1,0,1) \in Im(b)$.
Comme $Im(b)$ est un espace vectoriel, les combinaisons linéaires de $(1,1,0)$ et $(1,0,1)$ restent dans $Im(b)$, prouvant que $F \subset Im(b)$.
$(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,0,-1) + \frac{1}{2}(3,2,1)$ donc $(1,1,0) \in Im(Id-a)$,
$(1,0,1) = -1(-1,0,-1) + 0(3,2,1)$ donc $(1,0,1) \in Im(Id-a)$.
Comme $Im(Id-a)$ est un espace vectoriel, les combinaisons linéaires de $(1,1,0)$ et $(1,0,1)$ restent dans $Im(Id-a)$, prouvant que $F \subset Im(Id-a)$.
• On conclut que $F = Im(b) = Im(Id-a)$.

✓ question difficile et peu habituelle pour la voie ecg !

3)**Question modifiée !**
a)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$\begin{aligned} au+bv+cw=0 &\iff a(1,1,1)+b(1,0,1)+c(0,-1,1)=(0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} a+b=0\\ a-c=0\\ a+b+c=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} b=-a\\ c=a\\ a-a+a=0\end{cases}\\ &\iff a=b=c=0.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}$ est libre.
$\mathscr{C}$ est une famille libre de cardinal 3 de $\mathbf{R}^3$ avec $dim\mathbf{R}^3 = 3$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.
b)$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Après calculs, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
4)P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, A la matrice de a dans $\mathscr{B}$ et D la matrice de a dans $\mathscr{C}$.
D'après la formule de changement de base, on a :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP\\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3\\ -4 & 6 & 4\\ -2 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0\\ 6 & 0 & -2\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

On a de même :

$$\begin{aligned} B' &= P^{-1}BP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5)On sait déjà que $A = PDP^{-1} \quad (*)$

Montrons ensuite l'égalité demandée par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : ≪ $A^n = PD^nP^{-1}$ ≫.

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= A(PD^nP^{-1}) \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \text{ par hypothèse de récurrence et par } (*) \\ &= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} \\ &= PDID^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vrai.

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

6)$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \big(1/2\big)^n & 0 \\ 0 & 0 & \big(1/3\big)^n \end{pmatrix}$.

Puis, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La question 5) donne alors :

$$A^n = P\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$= E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G$, avec :

$E = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, $F = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $G = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Après calculs, on trouve : $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7)$L' = DL' + B'$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/2 & q/2 \\ 0 & 0 & r/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/2+1 & q/2-1 \\ 0 & 0 & r/3+1 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} p &= p/2+1 \\ q &= q/2-1 \\ r &= r/3+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p &= 2 \\ q &= -2 \\ r &= 3/2 \end{cases}$$

Donc $L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$.

8)Remarquons tout d'abord que $L = PL'P^{-1} \iff L' = P^{-1}LP$.

$L = PL'P^{-1}$

$= P(DL' + B')P^{-1}$ d'après la question 7)

$= PDL'P^{-1} + PB'P^{-1}$

$= PD(P^{-1}LP)P^{-1} + B$

$= PDP^{-1}L + B$

$= AL + B$.

9)Par construction, $L = PL'P^{-1}$. Le calcul donne : $L = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \\ 9/2 & -2 & -5/2 \end{pmatrix}$.

Puis, $EL = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \\ 9/2 & -2 & -5/2 \end{pmatrix} = 0$.

10)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} U_n &= L + A^n(U_0 - L) \\ &= L + \left(E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G\right)(U_0 - L) \\ &= L + E(U_0 - L) + \left(\frac{1}{2}\right)^n F(U_0 - L) + \left(\frac{1}{3}\right)^n G(U_0 - L) \\ &= L + EU_0 - \cancel{EL} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G\right)(U_0 - L) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Donc les coefficients de la matrice $\left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

Et également ceux de la matrice $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G\right)(U_0 - L)$.

Donc les coefficients de la matrice U_n tendent quand $n \to +\infty$ vers ceux de la matrice $EU_0 + L$.

Exercice 2 (ecricome 2012)

Partie I

1)Le développement limité de e^x en 0 à l'ordre 2 est : $e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.
Comme $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$, on peut remplacer x par $-x$ dans l'égalité, ce qui donne :
$e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, puis $1 - e^{-x} = x - \dfrac{x^2}{2} - o(x^2)$.
On déduit : $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{o(x^2)}{x}$.
Donc f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par :
$f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$.
En conséquence, f est dérivable en 0 donc continue en 0.
Par ailleurs, f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient, composée et inverse de fonctions continues.
f est donc continue sur $[0, +\infty[$.

2)On a déjà vu que f est dérivable en 0.
Et $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\dfrac{1}{2} + o(1)\right) = -\dfrac{1}{2}$.

3)f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient, composée et inverse de fonctions dérivables.
$\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2} = \dfrac{(x + 1)e^{-x} - 1}{x^2}$.

4)Pour tout $x > 0$, posons $\varphi(x) = (x + 1)e^{-x} - 1$.
φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, \varphi'(x) = e^{-x}+(x+1)(-e^{-x}) = -xe^{-x}$.
$\forall x > 0, \varphi'(x) \leq 0$ donc φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Par ailleurs, $\varphi(0) = 0$ donc $\forall x > 0, \varphi(x) \leq 0$.
On a alors $\forall x > 0, f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

Partie II

1)$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall u \in [0, n]\,, 0 \leq \dfrac{u}{n} \leq 1$, puis $-1 \leq -\dfrac{u}{n} \leq 0$.
Par croissance de l'exponentielle, on a : $e^{-1} \leq e^{-\frac{u}{n}} \leq 1$.

D'où $\forall u \in [0,n]\,, \dfrac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} \geq \dfrac{e^{-1}}{1+u}$.

En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et n, on déduit :

$$\int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u \geq \int_0^n \frac{e^{-1}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

Enfin, $\displaystyle\int_0^n \frac{e^{-1}}{1+u}\mathrm{d}u = e^{-1}\int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{1}{e}\left[\ln(1+u)\right]_0^n = \frac{1}{e}\ln(n+1)$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*, U_n \geq \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

2)f est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ existe.

3)$\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u - U_n = \int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u - \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_0^n \frac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u.$

En posant $x = \frac{u}{n}$ dans l'intégrale précédente, on obtient :

$$\int_0^n \frac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{1+nx}n\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\mathrm{d}x.$$

$\forall x \in [0,1]\,, \dfrac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\mathrm{d}x \geq 0 \quad (1)$

De plus, $\forall x \in [0,1]\,, \frac{1}{n}+x \geq x$. Par inverse, $\dfrac{1}{\frac{1}{n}+x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Puis, $\dfrac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x} \leq \dfrac{1-e^{-x}}{x}$, c'est-à-dire : $\dfrac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x} \leq f(x)$.

En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$$

De (1) et (2), on tire : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, c'est-à-dire :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u - U_n \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

4)On déduit $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq U_n \leq \int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u.$

Or, $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u = \ln(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*, \ln(n+1) - \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq U_n \leq \ln(n+1)$.

Posons $C = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, c'est une constante.

En divisant membre à membre par $\ln(n+1)$, on obtient :

$\forall n \in \mathbf{N}^*, 1 - \dfrac{C}{\ln(n+1)} \leq \dfrac{U_n}{\ln(n+1)} \leq 1.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{C}{\ln(n+1)}\right) = 1.$

D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\ln(n+1)} = 1.$

Donc $U_n \sim \ln(n+1)$.

Exercice 3 (ecricome 2012)

1)Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, notons O_k l'original numéroté k et C_k la copie numérotée k.

Lors de la 1ère pioche, le nbre de tirages (simultanés) possibles est :

$\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$.

Or, $\overline{A_n} = \{\{O_1, C_1\}, ..., \{O_n, C_n\}\}$. Donc $Card\left(\overline{A_n}\right) = n$.

On déduit : $a_n = P(A_n) = 1 - P\left(\overline{A_n}\right) = 1 - \frac{n}{n(2n-1)} = \frac{2n-2}{2n-1}$.

2)a)2)$T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. La variable aléatoire T_2 est donc discrète infinie.

Pour tout entier $i \geq 1$, notons :

$S_i =$« à la i-ème pioche, les deux feuilles piochées sont agrafées »,

$E_i =$« à la i-ème pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées ».

Remarquons que la boîte ne contenant que 4 copies, un succès est automatiquement suivi d'un succès.

Ainsi, on a :

$P(T_2 = k)$
$= P(E_1 \cap ... \cap E_{k-2} \cap S_{k-1} \cap S_k)$
$= P(E_1)P_{E_1}(E_2) \cdots P_{E_1 \cap \cdots E_{k-3}}(E_{k-2}) \cdots P_{E_1 \cap \cdots E_{k-2}}(S_{k-1}) \cdots P_{E_1 \cap \cdots E_{k-2} \cap S_{k-1}}(S_k)$
$= a_2 \times a_2 \times \cdots \times a_2 \times (1 - a_2) \times 1$
$= (1 - a_2)a_2^{k-2}$.

2)b)$S_2 = T_2 - 1$ et $T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Donc $S_2(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

$\forall k \in \mathbf{N}^*$, $P(S_2 = k) = P(T_2 - 1 = k) = P(T_2 = k + 1) = (1 - a_2)a_2^{k-1}$.

Donc $S_2 \hookrightarrow \mathscr{G}(1 - a_2)$.

$E(T_2) = E(S_2 + 1) = E(S_2) + 1 = \frac{1}{1 - a_2} + 1 = \frac{2 - a_2}{1 - a_2}$.

$V(T_2) = V(S_2 + 1) = V(S_2) = \frac{a_2}{(1 - a_2)^2}$.

3)a)$T_3(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$.

$P(T_3 = 2) = 0$.

En notant de nouveau $S_i =$« à la i-ème pioche, les deux feuilles piochées sont agrafées », on a :

$$\begin{aligned} P(T_3 = 3) &= P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \\ &= P(S_1)P_{S_1}(S_2)P_{S_1 \cap S_2}(S_3) \\ &= (1 - a_3) \times (1 - a_2) \times 1 = (1 - a_2)(1 - a_3). \end{aligned}$$

3)b)La formule des probabilités totales pour le sce $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ donne :

$$\begin{aligned} P(T_3 = k + 1) &= P_{\overline{A_3}}(T_3 = k + 1)P\left(\overline{A_3}\right) + P_{A_3}(T_3 = k + 1)P(A_3) \\ &= (1 - a_3)P_{\overline{A_3}}(T_3 = k + 1) + a_3 P_{A_3}(T_3 = k + 1). \end{aligned}$$

De plus, $P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) = P(T_2 = k)$.
En effet, supposons que $\overline{A_3}$ est réalisé. Cela signifie qu'à la première pioche, les feuilles sont agrafées. Au moment de réaliser la deuxième pioche, la boîte ne contient plus que deux originaux et deux copies.
Réaliser l'événement $(T_3 = k+1)$ revient alors à vider en k pioches une boîte contenant initialement deux originaux et deux copies.

De même, $P_{A_3}(T_3 = k+1) = P(T_3 = k)$.
En effet, supposons que A_3 est réalisé. Cela signifie qu'à la première pioche, les feuilles ne sont pas agrafées. Au moment de réaliser la deuxième pioche, la boîte contient toujours trois originaux et trois copies.
Réaliser l'événement $(T_3 = k+1)$ revient alors à vider en k pioches une boîte contenant initialement trois originaux et trois copies.

On a donc $P(T_3 = k+1) = (1-a_3)P(T_2 = k) + a_3 P(T_3 = k)$.

3)c)Montrons ce résultat par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : ≪ $P(T_3 = k) = \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)$ ≫.

$\mathscr{P}(k)$ est vraie car le membre de droite est nul. Quant au membre de gauche, il est nul aussi grâce à la question 3)a).

Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$P(T_3 = k+1)$
$= (1-a_3)P(T_2 = k) + a_3 P(T_3 = k)$
$= (1-a_3)(1-a_2)a_2^{k-2} + a_3 P(T_3 = k)$ grâce à la question 2)a)
$= (1-a_3)(1-a_2)a_2^{k-2} + a_3 \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)$ par HR
$= \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left((a_3 - a_2)a_2^{k-2} + a_3\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)\right)$
$= \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3 a_2^{k-2} - a_2^{k-1} + a_3^{k-1} - a_3 a_2^{k-2}\right)$
$= \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-1} - a_2^{k-1}\right)$.

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k \geq 2$.

3)d)$\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k)$
$= \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)$
$= \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)$

$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} a_3^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty} a_2^{k-2}\right)$$

$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_3^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_2^{n}\right) \text{ en posant } n = k-2.$$

Les séries $\sum_{n\geq 0} a_3^n$ et $\sum_{n\geq 0} a_2^n$ sont des séries géométriques convergentes car a_1 et a_2 sont dans $]0,1[$.

$$\text{Donc } \sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3=k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{1-a_3} - \frac{1}{1-a_2}\right)$$

$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{(1-a_2)-(1-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)}\right)$$

$$= 1.$$

3)e)D'après le théorème de transfert, $T_3 - 1$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 2}(k-1)P(T_3=k)$ est absolument convergente.

Pour tous entiers $k \geq 2$ et $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} |(k-1)P(T_3=k)|$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (k-1)P(T_3=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)$$

$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{n}\left((k-1)a_3^{k-2} - (k-1)a_2^{k-2}\right).$$

$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(ia_3^{i-1} - ia_2^{i-1}\right), \text{ en posant } i = k-1$$

$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} ia_3^{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} ia_2^{i-1}\right)$$

Les séries $\sum_{i\geq 1} ia_3^{i-1}$ et $\sum_{i\geq 1} ia_2^{i-1}$ convergent car ce sont deux séries dérivées première de paramètre a_3 et a_2 appartenant à $]0,1[$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} |(k-1)P(T_3=k)|$ existe et est finie, ce qui prouve que $T_3 - 1$ admet une espérance. Elle est donnée par :

$$E(T_3-1)=\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)P(T_3=k)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}(k-1)P(T_3=k)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}ia_3^{i-1}-\sum_{i=1}^{n-1}ia_2^{i-1}\right)$$
$$=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}ia_3^{i-1}-\sum_{i=1}^{+\infty}ia_2^{i-1}\right)$$
$$=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right).$$

Puis, T_3 admet une espérance donnée par :

$$E(T_3)=E\big((T_3-1)+1\big)$$
$$=E(T_3-1)+1$$
$$=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{1}{(1-a_3)^2}-\frac{1}{(1-a_2)^2}\right)+1.$$

3)f)D'après le théorème de transfert, $T_3(T_3-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 2}k(k-1)P(T_3=k)$ est absolument convergente.

Pour tous entiers $k\geq 2$ et $n\geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n}|k(k-1)P(T_3=k)|$$
$$=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)P(T_3=k)$$
$$=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-2}-a_2^{k-2}\right)$$
$$=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)a_3^{k-2}-k(k-1)a_2^{k-2}\right).$$
$$=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_3^{k-2}-\sum_{k=2}^{n}k(k-1)a_2^{k-2}\right)$$

Les séries $\sum_{k\geq 2}k(k-1)a_3^{k-2}$ et $\sum_{k\geq 2}k(k-1)a_2^{k-2}$ convergent car ce sont deux séries dérivées seconde de paramètre a_3 et a_2 appartenant à $]0,1[$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}|k(k-1)P(T_3=k)|$ existe et est finie, ce qui prouve que $T_3(T_3-1)$ admet une espérance. Elle est donnée par :

$E(T_3(T_3-1))$
$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(T_3=k)$
$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(T_3=k)$
$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_3^{k-2} - \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_2^{k-2}\right)$
$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_3^{k-2} - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_2^{k-2}\right)$
$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(\frac{2}{(1-a_3)^3} - \frac{2}{(1-a_2)^3}\right).$

Enfin, $T_3^2 = T_3(T_3-1)+T_3$.
Comme $T_3(T_3-1)$ et T_3 admettent une espérance, alors T_3^2 admet une espérance.
Donc T_3 admet une variance d'après la formule de Koënig.