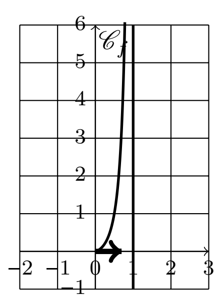
Corrrection DM1

Exercice 1 (extrait d'eml 2020)
1)$x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de fonctions dérivables.
$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,1[$ et ne s'annule pas.
Par quotient, f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{1-x} \times \ln x - \frac{1}{x} \times \ln(1-x)}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)}}{(\ln x)^2}.$$

Donc $f'(x) = \dfrac{-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\,(\ln x)^2}$.

2)a)$\forall t \in]0,1[\,, t > 0$ et $\ln t < 0$. Donc $\forall t \in]0,1[\,, t\ln t < 0$.
b)$\forall x \in]0,1[\,, x\ln x < 0$ et $(1-x)\ln(1-x) < 0$ car $1-x \in]0,1[$.
On déduit que $\forall x \in]0,1[\,, -x\ln x - (1-x)\ln(1-x) > 0$, puis $f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]0,1[$.
3)a)$\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Or, $f(0) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, ce qui prouve que f est continue en 0.
b)Posons $g(x) = \ln(1-x)$. On a $g(0) = 0$.
g est dérivable sur $]-\infty,1[$ et $\forall x < 1,\ g'(x) = \dfrac{-1}{1-x}$, en particulier $g'(0) = -1$.
Ainsi, $\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$, représentant le taux d'accroissement de g en 0.
Comme g est dérivable en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = g'(0) = -1$.
c)$\forall x \in]0,1[\,, \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x\ln x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} \times \dfrac{1}{\ln x}$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Par inverse, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$. Par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.
Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
4) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0^-$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale pour $\mathscr{C}_f$.
5)



Exercice 2

1)a)Par énoncé, $F = \text{Vect}\,(I,J,K)$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$. Donc F est un espace vectoriel.

1)b)Pour tous réels a, b et c, on a :

$aI + bJ + cK = 0$

$$\iff a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & 0 & c & b \\ b & a & 0 & c \\ c & b & a & 0 \\ 0 & c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0.$$

Donc (I,J,K) est libre.

1)c)(I,J,K) est une famille génératrice de F car $F = \text{Vect}\,(I,J,K)$.
De plus, (I,J,K) est libre. Donc (I,J,K) est une base de F et $dim F = 3$.

$$2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$$

$$\text{Donc } G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

$$\text{Posons } U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$G = \text{Vect}\,(U_1,U_2)$ donc (U_1,U_2) est une famille génératrice de G.

La famille (U_1,U_2) est libre car les vecteurs U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires.
De plus, c'est une famille génératrice de G. C'est donc une base de G.

3)Pour tous réels a, b, c et d, on a :

$aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4 = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \\ a-c \\ b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+c &= 0 \\ b+d &= 0 \\ a-c &= 0 \\ b-d &= 0 \end{cases} \iff a = b = c = d = 0.$$

Donc la famille (U_1,U_2,U_3,U_4) est libre.
C'est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$.