TD8 - intégrales

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1)$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ 2)$g : x \mapsto \dfrac{x^2}{(1+x^3)^2}$ 3)$h : x \mapsto e^{-3x}$ 4)$i : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ 5)$j : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 2 ★ ★ ☆☆

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 xe^{-2x} dx$.

Exercice 3 ★ ★ ☆☆

Soit $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x(x^3+1)} dx$.

1)A l'aide du changement de variable $t = x^3$, montrer que $I = \displaystyle\int_1^8 \frac{1}{t(t+1)} dt$.

2)En remarquant que $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$, calculer I.

Exercice 4 ★ ★ ☆☆

1)Déterminer des réels a et b tels que $\forall t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+1}$.

2)A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$.

Exercice 5 ★ ★ ☆☆

Déterminer une primitive sur $]0, +\infty[$ de $f : x \mapsto x \ln x$.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆

Soit φ la fonction définie par $\forall x > 1,\ \varphi(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$.

1)Justifier que φ est bien définie et qu'elle est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

2)Etudier les variations, puis le signe de φ.

3)Montrer que $\forall t > 0,\ \ln t \leq t - 1$.

4)En déduire que $\forall x \geq 2,\ \varphi(x) \geq \ln(x-1)$, puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆

Pour tout $x > 0$, on pose : $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.

1)Justifier que $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ admet une primitive F sur $]0, +\infty[$, exprimer $\psi(x)$ à l'aide de F, puis en déduire que ψ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

2)Montrer que $\forall x > 0,\ \psi'(x) = \dfrac{2}{\ln(1+4x^2)} - \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$.

3)Montrer que $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq \psi(x) \leq \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.

4)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \psi(x)$.

5)Dresser le tableau de variations de ψ.

Exercice 8 (extrait hec 2002) ★ ★ ★☆

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1)Calculer $I_{0,q}$ en fonction de q.

2)A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N}^*,\ I_{p+1,q-1} = \frac{p+1}{q} I_{p,q}.$$

3)Montrer que $\forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N},\ I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Exercice 9 (extrait hec 2004) ★ ★ ★☆

Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $c_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$.

1)Montrer que $(c_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs.

2)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$.

3)a)Montrer que $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n} \leq 2c_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.

b)En déduire un équivalent simple de c_n en $+\infty$.

4)a)Calculer c_1.

b)Prouver que $\forall n \geq 2,\ c_n = (-1)^n \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$.

c)En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et préciser sa somme.

Indications / Réponses

Exercice 1

1)$F : x \mapsto \dfrac{-1}{2x^2}$ 2)$G : x \mapsto \dfrac{-1}{3(1+x^3)}$ 3)$H : x \mapsto -\dfrac{1}{3}e^{-3x}$ 4)$I : x \mapsto \ln(\ln x)$
5)$J : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.

Exercice 2

$I = e - 2$ et $J = \dfrac{1-3e^{-2}}{4}$.

Exercice 3

2)$I = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right)$.

Exercice 4

1)$a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.
2)Le changement de variable donne : $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}dt$, puis en utilisant la question précédente, $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 5

Ecrire une primitive F sous forme d'une intégrale à l'aide de la propriété P12, puis effectuer une intégration par parties.
On trouve $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

Exercice 6

1)P12 donne $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.
3)Etudier les variations, puis le signe de $g : t \mapsto t - 1 - \ln t$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 7

1)$\psi(x) = F(2x) - F(x)$.

Exercice 8

3)Montrer par récurrence la proposition $\mathscr{P}(p)$: « $\forall q \in \mathbf{N},\ I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.