TD9 - intégrales impropres

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Justifier que les intégrales impropres suivantes convergent et donner leur valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}dt$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt.$

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆
Montrer que les intégrales impropres ci-dessous sont divergentes.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{t}{t^2+1}dt$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}dt.$

Exercice 3 ★ ★ ☆☆

1)Vérifier que $\forall t \in \mathbf{R} \setminus \{-1,0\}, \; \dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

2)En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}dt$ converge et préciser sa valeur.

Exercice 4 ★ ★ ☆☆

1)Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\, dt$ converge et préciser sa valeur.

2)Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ est paire.

3)Conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\, dt$ converge et préciser sa valeur.

Exercice 5 ★ ★ ☆☆
En posant $u = t-1$, montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t-1}}dt$ converge et préciser sa valeur.

Exercice 6 ★ ★ ★☆

En posant $u = (1-t)^{-1/3}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 (5-3t)(1-t)^{-1/3}dt$ converge et qu'elle vaut $24/5$.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆

1)Déterminer des constantes réelles a, b et c telles que

$$\forall t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}, \ \frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{c}{1+t}.$$

2)A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall x \geq 1, \ \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^3} dt = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{t^2(1+t)} dt.$$

3)Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^3} dt$ converge et préciser sa valeur.

Exercice 8 ★ ★ ☆☆

1)Trouver un équivalent simple de $\dfrac{1}{t^2 - t}$ en 1.

2)En déduire que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2 - t} dt$ diverge.

Exercice 9 ★ ★ ☆☆

1)Montrer que $\dfrac{\ln t}{t^2+1} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$.

2)En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$.

3)Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, dt$ converge. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt$.

4)Conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$.

Exercice 10 ★ ★ ☆☆

Soit $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite d'intégrales définie par : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n(1+t)} dt$.

1)Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'intégrale I_n est convergente.
2)Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante, puis convergente.
3)Etablir que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \ I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 11 (hec 2010) ★ ★ ★☆

Soit $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'intégrales définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1)Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
2)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, \ I_n = n!$

Indications / Réponses

Exercice 1

1)Une primitive est $t \mapsto -\frac{1}{3t^3}$, puis l'intégrale vaut $\frac{1}{3}$

2)Une primitive est $t \mapsto -\frac{1}{2(1+t^2)}$, puis l'intégrale vaut $\frac{1}{2}$

3)Une primitive est $t \mapsto -2\sqrt{1-t}$, puis l'intégrale vaut 2

4)Une primitive est $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2t}$, puis l'intégrale vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 2

1)Une primitive est $t \mapsto \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$

2)Une primitive est $t \mapsto \frac{1}{2}(\ln t)^2$

3)Une primitive est $t \mapsto \ln(e^t - e^{-t})$.

Exercice 3

3)$\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{1}{t(t+1)}dt = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$

Exercice 4

1)Une primitive est $t \mapsto -\frac{1}{1+e^t}$, puis l'intégrale vaut $\frac{1}{2}$.

3)Voir P5. L'intégrale doublement impropre vaut 1.

Exercice 5

$\forall x \in]1,2], \int_x^2 \frac{t}{\sqrt{t-1}}dt = \int_{x-1}^1 \frac{u+1}{\sqrt{u}}du = \int_{x-1}^1 \left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right)du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right]_{x-1}^1$

$= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} - 2(x-1)^{1/2} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \frac{8}{3}.$

Exercice 6

L'intégrale est impropre en 1.

$\forall x \in [0,1[, \int_0^x (5-3t)(1-t)^{-1/3}dt = \int_1^{(1-x)^{-1/3}} \left(6u^{-3} + 9u^{-6}\right)du = \left[-3u^{-2} - \frac{9}{5}u^{-5}\right]_1^{(1-x)^{-1/3}}$

$= -3(1-x)^{2/3} - \frac{9}{5}(1-x)^{5/3} + \frac{24}{5} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{24}{5}.$

Exercice 7

1)$a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$.

2)On pose :

$u(t) = \ln(1+t) \qquad v'(t) = \frac{1}{t^3}$

$u'(t) = \frac{1}{1+t} \qquad v(t) = -\frac{1}{2t^2}$

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^3}dt &= \left[-\frac{\ln(1+t)}{2t^2}\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{2t^2(1+t)}dt \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln(1+x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t^2(1+t)}dt.\end{aligned}$$

3)De la question 1), on déduit :

$\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2(1+t)}dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t}\right) = \left[-\frac{1}{t} - \ln t + \ln(1+t)\right]_1^x$

$\displaystyle = -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + 1 - \ln 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \ln 2.$

Puis, $\displaystyle\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln(1+x)}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln 2}{2}$.

En passant à la limite dans la question 2) :

$\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^3}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2.$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^3}dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}(1-\ln 2) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8

1)$t^2 - t = t(t-1) \underset{1}{\sim} t-1$ donc $\displaystyle\frac{1}{t^2-t} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t-1}$.

2)Vérifiez que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t-1}dt$ diverge et appliquez le critère d'équivalence.

Exercice 10

1)Utiliser le critère d'équivalence.

Exercice 11

1)Commencer par montrer que $\displaystyle t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2)Faire une intégration par parties dans l'intégrale définissant I_n.

3)Récurrence.