Exercice 1 (ecricome 2011)

1)Δ est diagonale donc diagonalisable (écrire $\Delta = I^{-1}\Delta I$).

$N^2 = 0$ donc N est nilpotente.

$\Delta N = N$ et $N\Delta = N$ donc $\Delta N = N\Delta$.

Enfin, $A = N + \Delta$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

2)a)Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on transforme $A - \lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 4-2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \longleftarrow (3-\lambda)L_1 + 2L_2 \\ L_3 \end{array}$$

λ est valeur propre de A

$\Longleftrightarrow A - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 4-2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ou $1 - \lambda = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

Donc $sp(A) = \{1, 2\}$.

b)Cherchons les sous-espaces propres de A.

$E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x + y - z & = 0 \quad L_1 \\ -2x - y + 2z & = 0 \quad L_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} 2x + y - z = 0 & L_1 \\ z = 0 & L_2 \longleftrightarrow L_1 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -2x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$ et $dimE_1(A) = 1$.

$E_2(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 2I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - 2I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ -2x - 2y + 2z & = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_2(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(A)$ et $dimE_2(A) = 1$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 2, mais $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, A n'est pas diagonalisable.

> Remarque
> On n'était pas obligé de chercher une base des s.e.p, avoir leur dimension suffisait. On obtenait leur dimension par la formule de cours :
> $dimE_1(A) + rg(A - I) = 3$ et $dimE_2(A) + rg(A - 2I) = 3$.
> Il suffisait alors de chercher le rang de $A - I$ et de $A - 2I$.

3)a)$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b)Les calculs précédents donnent : $\Delta X_1 = 2X_1$, $\Delta X_2 = X_2$ et $\Delta X_3 = X_3$.
Ils montrent d'une part, que X_1 est un vecteur propre de Δ associé à 2, d'autre part que X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A associés à 1.
(On vérifie au passage que X_1, X_2 et X_3 sont non nuls).

(X_1) est une famille de $E_2(A)$, libre car formée d'un seul vecteur non nul.
(X_2, X_3) est une famille de $E_1(A)$, libre également par non colinéarité des vecteurs.
Par concaténation de familles libres provenant de sous-espaces propres différents, on conclut que la famille (X_1, X_2, X_3) est libre.
C'est une famille libre dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
On vient de construire une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont chaque vecteur est un vecteur propre de Δ, ce qui prouve que Δ est diagonalisable.

> Remarque
> On pouvait aussi faire une recherche systématique de valeurs propres en transformant par Gauss $\Delta - \lambda I$ en une matrice triangulaire. C'est plus long puisqu'il faudrait ensuite chercher les sous-espaces propres et leur dimension.

Δ est diagonalisable. D'après le cours, il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $\Delta = PDP^{-1}$.

Les colonnes de P sont formées des bases des sous-espaces propres de Δ.
D porte en diagonale les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les colonnes de P.

La matrice D est déjà donnée par l'énoncé. La première colonne de P est donc formée d'une base de $E_2(A)$, les deuxième et troisième colonnes sont formées d'une base de $E_1(A)$.

On peut prendre par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

> Remarque
> Il n'y a pas unicité de P puisqu'il n'y a pas unicité des bases des sous-espaces propres.

c)Par la méthode de Gauss, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4)a)On trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc N est nilpotente.

b)On sait déjà que Δ est diagonalisable et que N est nilpotente.
De plus, le produit donne : $N\Delta = N$ et $\Delta N = N$ donc $N\Delta = \Delta N$.
Enfin, on a clairement : $A = N + \Delta$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

c)$A^p = (N+\Delta)^p$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} N^k \Delta^{p-k} \quad \text{valide car } N\Delta = \Delta N \\ &= \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} N^0 \Delta^p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} N^1 \Delta^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \underbrace{N^k}_{=0} \Delta^{p-k} \\ &= \Delta^p + pN\Delta^{p-1}. \end{aligned}$$

d)Démonstration par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $\Delta^k N = N\Delta^k = N$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $\Delta N = N\Delta = N$ », c'est vrai car montré dans 4)b).

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
De l'hypothèse de récurrence $\Delta^k N = N$, en multipliant à gauche par Δ :

$\Delta\Delta^k N = \Delta N$, soit $\Delta^{k+1} N = N$ car $\Delta N = N$.

De l'hypothèse de récurrence $N\Delta^k = N$, en multipliant à droite par Δ :

$N\Delta^k\Delta = N\Delta$, soit $N\Delta^{k+1} = N$ car $N\Delta = N$.
On a établi que $\Delta^{k+1}N = N\Delta^{k+1} = N$ donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Delta^k N = N\Delta^k = N$.

e)Démonstration par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition « $\Delta^k = PD^kP^{-1}$.

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $\Delta = PDP^{-1}$, ce qui est vrai d'après 3)b).

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} &= \Delta^k\Delta \\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} \quad \text{grâce à HR et 3)b)} \\ &= PD^kIDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Delta^k = PD^kP^{-1}$.

f)La question 4)d) donne en particulier : $N\Delta^{p-1} = N$.
De la question 4)c), on déduit alors :

$$A^p = \Delta^p + pN.$$

D'après la question 4)e), la matrice Δ^p est semblable à la matrice D^p, laquelle est diagonale, comme puissance d'une matrice diagonale.
Donc Δ^p est diagonalisable.

De plus, N étant nilpotente, pN l'est également.

Enfin, on a :

$\Delta^p(pN) = p\Delta^p N = pN$ grâce à 4)d),
et $(pN)\Delta^p = pN\Delta^p = pN$ de nouveau grâce à 4)d).
Donc $(pN)\Delta^p = \Delta^p(pN)$.

Ainsi, (Δ^p, pN) est une décomposition de Dunford de A^p.

Exercice 2 (ecricome 2011)

Partie I

1) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Par produit, $\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x = +\infty$.
Par différence, $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2)φ est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est construite sur cet intervalle comme différence et produit de fonctions continues.

$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées. Par différence, $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$.
Or, $\varphi(0) = 1$. On a donc établi que $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$, ce qui montre la continuité à droite en 0.
On conclut que φ est continue sur $[0, +\infty[$.

3)φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est construite sur cet intervalle comme différence et produit de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\left(2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x}\right) = -2x \ln x - x = x(-2 \ln x - 1).$

4)$\forall x > 0,\ \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \dfrac{(1 - x^2 \ln x) - 1}{x} = -x \ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$
Donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.

5)Pour tout $x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $-2 \ln x - 1$.

Donc $\varphi'(x) \geq 0 \iff -2 \ln x - 1 \geq 0 \iff 2 \ln x \leq -1 \iff \ln x \leq -\dfrac{1}{2}$
$\iff x \leq e^{-\frac{1}{2}}$.
φ est donc croissante sur $\left[0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$, puis décroissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$	$1 + \dfrac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

$\varphi\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - e^{-1} \times \left(\dfrac{-1}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{2e}.$

6)• φ est positive sur $\left[0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ donc ne peut s'annuler sur cet intervalle.

• φ est continue et strictement décroissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. Elle réalise donc une bijection de $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ sur $\varphi\left(\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, 1 + \dfrac{1}{2e}\right]$.

$0 \in \left]-\infty, 1+\dfrac{1}{2e}\right]$ admet un unique antécédent $\alpha \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ par φ.

Ainsi, il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

• $\varphi(\sqrt{2}) = 1 - 2\ln\sqrt{2} = 1 - 2\ln\left(2^{1/2}\right) = 1 - 2 \times \dfrac{1}{2}\ln 2 = 1 - \ln 2 \approx 0,3$

$\varphi(2) = 1 - 4\ln 2 \approx 1 - 4 \times 0,7 \approx -1,8$

On a donc : $\varphi(2) < \underbrace{\varphi(\alpha)}_{=0} < \varphi(\sqrt{2})$.

Comme φ est strictement décroissante sur $\left[\sqrt{2}, 2\right]$, on déduit : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

7)L'intégrale I n'est pas vraiment impropre en 0 car φ est bien continue sur $[0, \alpha]$. Donc l'intégrale I converge.

A cause du logarithme, on va devoir s'éloigner de zéro pour la calculer.

Soit $A > 0$. Calculons $\displaystyle\int_A^\alpha \varphi(x)dx$.

$$\int_A^\alpha \varphi(x)dx = \int_A^\alpha 1dx - \int_A^\alpha x^2\ln x = (\alpha - A) - \int_A^\alpha x^2 \ln x \quad (*)$$

On calcule ensuite $\displaystyle\int_A^\alpha x^2\ln x$ à l'aide d'une IPP en posant :

$u'(x) = x^2 \qquad v(x) = \ln x$

$u(x) = \dfrac{x^3}{3} \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

u et v sont de classe C^1 sur $[A, \alpha]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_A^\alpha x^2\ln x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_A^\alpha - \int_A^\alpha \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}dx \\
&= \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{A^3}{3}\ln A - \frac{1}{3}\int_A^\alpha x^2 dx \\
&= \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{A^3}{3}\ln A - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_A^\alpha \\
&= \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{A^3}{3}\ln A - \frac{\alpha^3}{9} + \frac{A^3}{9}.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \frac{A^3}{3}\ln A = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}\frac{A^3}{9} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}\int_A^\alpha x^2\ln x = \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{\alpha^3}{9}$.

En passant à la limite dans $(*)$ quand $A \to 0^+$, on conclut que

$$I = \lim_{A\to 0^+}\int_A^\alpha \varphi(x)dx = \alpha - \left(\frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{\alpha^3}{9}\right)$$

C'est-à-dire, $I = \alpha - \dfrac{\alpha^3}{3}\ln\alpha + \dfrac{\alpha^3}{9}$.

Enfin, comme $\varphi(\alpha)=0$, on a : $1-\alpha^2\ln\alpha=0$, d'où $\alpha^2\ln\alpha=1$.

En reportant dans la valeur de I trouvée au dessus, on a :

$I=\alpha-\dfrac{\alpha}{3}\times\underbrace{\alpha^2\ln\alpha}_{=1}+\dfrac{\alpha^3}{9}=\dfrac{2\alpha}{3}+\dfrac{\alpha^3}{9}=\dfrac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}$.

8)a)fonction Python :

```
import numpy as np
def phi(x):
    return 1-x**2*np.log(x)
```

b)programme Python :

```
import numpy as np
a=np.sqrt(2)
b=2
for k in range(7):
    if phi(a)*phi((a+b)/2)<0:
        b=(a+b)/2
    else:
        a=(a+b)/2
print(a,b)
```

Remarque

Ce programme permet de trouver par dichotomie un encadrement de α.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a : $a_n<\alpha<b_n$.

En exécutant le programme, on trouve $a_7\approx 1.528$ et $b_7\approx 1.533$

Partie II

1)La fonction $(x,y)\mapsto xy$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Le logarithme étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, les fonctions $(x,y)\mapsto\ln x$ et $(x,y)\mapsto\ln y$ sont de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Par produit, la fonction $(x,y)\mapsto(\ln x)(\ln y)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Par somme, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

2)Pour tout $x>0$ et $y>0$, on a :

$\partial_1 f(x,y)=y+\dfrac{1}{x}\ln y$ et $\partial_2 f(x,y)=x+\dfrac{1}{y}\ln x$.

Les points critiques de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ sont les solutions du système

$$\begin{cases}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}y+\dfrac{1}{x}\ln y=0\\[2ex] x+\dfrac{1}{y}\ln x=0\end{cases}\iff\begin{cases}xy+\ln y=0 & L_1\\ xy+\ln x=0 & L_2\end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$, le système est équivalent à :
$\iff \left\{ \begin{array}{c} xy + \ln y = 0 \\ \ln y - \ln x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} xy + \ln y = 0 \\ \ln y = \ln x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 + \ln x = 0 \\ y = x \end{array} \right.$
Il reste à remarquer que pour tout $x > 0$, on a :
$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + \ln x}{x^2}.$
Donc $x^2 + \ln x = 0 \iff \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = \alpha \iff x = \frac{1}{\alpha}.$
La solution du système est donc $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$, c'est l'unique point critique de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

3)Remarquons d'abord que $\forall t > 0,\ 1 - \varphi\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\ln t}{t^2}$.
Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial_1\left(y + \frac{1}{x}\ln y\right) = -\frac{\ln y}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}\times\left(-\frac{\ln y}{y^2}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2\left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right).$
$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1\left(x + \frac{1}{y}\ln x\right) = 1 + \frac{1}{xy},$
D'après le théorème de Schwarz, $\partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial^2_{1,2} f(x,y)$.
$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \partial_2\left(x + \frac{1}{y}\ln x\right) = -\frac{\ln x}{y^2} = \frac{x^2}{y^2}\times\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^2\left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right).$
4)Si f possède un extrémum local, ce ne peut être qu'au point critique $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ trouvé précédemment.
La matrice hessienne de f en ce point vaut :
$$\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) & \partial^2_{1,2} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \\ \partial^2_{2,1} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) & \partial^2_{2,2} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \varphi(\alpha) & 1 + \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 & 1 - \varphi(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}.$$
λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & 1 + \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$
$\iff \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 + \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
$\iff (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (1 + \alpha^2)(1 + \alpha^2) = 0$
$\iff (1 - \lambda)^2 = (1 + \alpha^2)^2$
$\iff 1 - \lambda = 1 + \alpha^2$ ou $-1 - \alpha^2$.
Les deux valeurs propres sont non nulles et de signes contraires. Donc f n'a pas d'extrémum local en $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ et donc pas d'extrémum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Exercice 3 (ecricome 2011)

Partie I

1)Place trois jetons sur la grille revient à construire une combinaison de 3 cases de l'ensemble des 9 cases, ce qui peut se faire de $\binom{9}{3}$ façons.

Or, $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{6!3!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$.

2)Il y a 3 lignes donc 3 possibilités de mettre les jetons horizontalement. Donc $P(H) = \dfrac{3}{84}$.

Il y a 3 colonnes donc 3 possibilités de mettre les jetons verticalement. Donc $P(V) = \dfrac{3}{84}$.

Il y a 2 diagonales donc 2 possibilités de mettre les jetons en diagonale. Donc $P(D) = \dfrac{2}{84}$.

3)La famille d'événements (H, V, D, N) forme un système complet.

Donc $P(N) = 1 - P(H) - P(V) - P(D) = 1 - \dfrac{8}{84} = \dfrac{76}{84} = \dfrac{19}{21}$.

4)a)A chaque relance, le joueur peut perdre 2 euros ou en gagner 18, la société peut gagner 2 euros ou en perdre 18.

Donc $\forall i \in \mathbf{N}^*,\ Z_i(\Omega) = \{-18, 2\}$.

$P(Z_i = 2) = P(N) = \dfrac{19}{21}$ et $P(Z_i = -18) = 1 - P(Z_i = 2) = \dfrac{2}{21}$.

On déduit : $E(Z_i) = 2P(Z_i = 2) - 18P(Z_i = -18) = 2 \times \dfrac{19}{21} - 18 \times \dfrac{2}{21} = \dfrac{2}{21}$.

b)$Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{10000} Z_i$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{10000} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{10000} \frac{2}{21} = \frac{20000}{21} \approx 1000.$$

La société peut donc espérer gagner environ 1000 euros par jour.

Partie II

1)a)Les 100 parties sont successives, identiques et indépendantes. A chaque partie, la probabilité de succès (= gain de la partie) vaut $\dfrac{2}{21}$.

X compte le nombre de succès.

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \dfrac{2}{21}\right)$.

b)Le cours donne : $E(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} = \dfrac{200}{21}$ et $V(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} \times \dfrac{19}{21}$.

c)Le joueur gagne 18 euros pour chacune des X parties gagnées et perd 2 euros pour chacune des $100 - X$ parties perdues.

Donc $T = 18X - 2(100 - X) = 20X - 200$.

Remarque
Si $T < 0$, c'est vraiment une perte. Si $T > 0$, c'est un gain !

2)La probabilité pour que le joueur ne gagne aucune partie sur n parties jouées est $\left(\dfrac{19}{21}\right)^n$, les n parties étant indépendantes.

La probabilité pour que le joueur gagne au moins une partie sur n parties jouées est donc $1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^n$.

$$1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \ln\left(\left(\frac{19}{21}\right)^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow n\ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln 2 \Longleftrightarrow n \geq \frac{-\ln 2}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \approx 7 \quad \text{car } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0.$$

Il faut donc jouer au moins 7 parties.

3)a)L'expérience aléatoire est constituée d'un certain nombre de parties successives, identiques et indépendantes. A chaque partie, la probabilité de succès (= gain de la partie) vaut $\dfrac{2}{21}$.
Y compte le rang d'obtention du premier succès.
Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{21}\right)$.

b)Le cours donne : $E(Y) = \dfrac{1}{\frac{2}{21}} = \dfrac{21}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{1 - \frac{2}{21}}{\left(\frac{2}{21}\right)^2} = \dfrac{19 \times 21}{4}$.

c)L'événement contraire est : « le joueur perd les k première parties ».

La probabilité de cet événement est $\left(\dfrac{19}{21}\right)^k$ du fait de l'indépendance.

D'où $p_k = 1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^k$.

Partie III

1)Supposons Δ réalisé. Un jeton est alors placé dans la case A1.
Il reste alors 2 jetons à placer, ce qui revient à choisir 2 cases parmi les 8 restantes, soit $\binom{8}{2} = \dfrac{8!}{6!2!} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ choix.

Pour réaliser H, il faut placer les 2 jetons restants sur la ligne A, ce qui ne peut se faire que d'une seule façon.

Donc $P_\Delta(H) = \dfrac{1}{28}$.

C'est le même raisonnement pour les deux autres événements.

Au final, $P_\Delta(H) = P_\Delta(V) = P_\Delta(D) = \dfrac{1}{28}$.

2)La formule des probabilités totales pour le sce $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ s'écrit :

$P(N) = P_\Delta(N)P(\Delta) + P_{\overline{\Delta}}(N)P(\overline{\Delta})$

Avec $P_\Delta(N) = 1 - P_\Delta(H) - P_\Delta(V) - P_\Delta(D) = 1 - \dfrac{3}{28} = \dfrac{25}{28}$,

et $P_{\overline{\Delta}}(N) = \dfrac{19}{21}$ car si la fonction aléatoire n'est pas déréglée, on se ramène à la probabilité trouvée dans la partie I.

On déduit : $P(N) = \dfrac{25}{28}x + \dfrac{19}{21}(1-x) = \left(\dfrac{25}{28} - \dfrac{19}{21}\right)x + \dfrac{19}{21} = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$.

3)$G(\Omega) = \{-18, 2\}$.

$P(G=2) = P(N) = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$ et $P(G=-18) = 1 + \dfrac{x}{84} - \dfrac{19}{21} = \dfrac{x}{84} + \dfrac{2}{21}$.

$$\begin{aligned}
E(G) &= 2P(G=2) - 18P(G=-18) \\
&= 2\left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(\frac{x}{84} + \frac{2}{21}\right) \\
&= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21}.
\end{aligned}$$

$E(G) > 0 \iff -\dfrac{20}{84}x + \dfrac{2}{21} > 0 \iff \dfrac{20}{84}x < \dfrac{2}{21} \iff x < \dfrac{2 \times 84}{20 \times 21} = \dfrac{2}{5}$.

La valeur maximale de x pour laquelle $E(G) > 0$ est donc $2/5$.

4)La probabilité cherchée est :

$$P_{\overline{N}}(\Delta) = \frac{P_\Delta(\overline{N})P(\Delta)}{P(\overline{N})} = \frac{\left(1 - \frac{25}{28}\right)x}{1 - \left(-\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}\right)} = \cdots = \frac{9x}{x+8}.$$