Exercice 1 (ecricome 2016)

Partie A

1)Pour tout couple (x, y) de réels, on a :

$$M(x,y) = x \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = xA + yB.$$

Donc $E = Vect(A, B)$ et E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

(A, B) est alors une famille génératrice de E et elle est libre car les matrices A et B ne sont pas proportionnelles.
(A, B) est donc une base de E et E de dimension 2.

2)$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

• $(A - I)X = O$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z & = 0 \\ -x + 3y - 2z & = 0 \\ 4y - 2z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ -x - y & = 0 \\ z & = 2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = -y \\ z & = 2y \end{cases}$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$E_1(A) \neq \{O\}$ donc 1 est une valeur propre de A et le sous-espace propre de A associé à 1 est $E_1(A)$.

• $(A - 2I)X = O$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + 2z & = 0 \\ -x + 2y - 2z & = 0 \\ 4y - 3z & = 0 \end{cases}$$

$\iff \left\{\begin{array}{ll} x & = -\frac{1}{2}z \\ y & = \frac{3}{4}z \end{array}\right.$

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$E_2(A) \neq \{O\}$ donc 2 est une valeur propre de A et le sous-espace propre de A associé à 2 est $E_2(A)$.

• $(A - 3I)X = O$

$\iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\iff \left\{\begin{array}{ll} -2y + 2z & = 0 \\ -x + y - 2z & = 0 \\ 4y - 4z & = 0 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{ll} x & = -z \\ y & = z \end{array}\right.$

Donc $E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E_3(A) \neq \{O\}$ donc 3 est une valeur propre de A et le sous-espace propre de A associé à 3 est $E_3(A)$.

• A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ admettant 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable d'après le théorème de réduction.

3)A étant diagonalisable, il existe d'après le cours une matrice P inversible et une matrice D_A diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A = PD_AP^{-1}$.
La diagonale de D_A est formée des valeurs propres de A, à savoir 1,2,3. On peut donc prendre $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Les colonnes de la matrice P sont constituées de gauche à droite de vecteurs propres associées respectivement aux valeurs propres 1,2,3.
Étant donnée la contrainte imposée par l'énoncé, on va prendre successivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On a alors $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4)La méthode de Gauss donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5)$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

• On a $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• On a $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $BX_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

• On a $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $BX_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $BX_1 = 0X_1$ et X_1 non-nul donc X_1 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.
On a $BX_2 = -1X_2$, $BX_3 = -1X_3$, X_2 et X_3 non-nuls donc X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de B associés à la valeur propre -1.

P étant inversible, la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ puisque P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ à la famille (X_1, X_2, X_3).
Ainsi, (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de B.
Cela prouve que B est diagonalisable.
Il existe alors une matrice diagonale D_B telle que $B = PD_BP^{-1}$, la diagonale de D_B étant formée des valeurs propres de B.

On a donc $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6)Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :
$M(x, y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} = PD(x, y)P^{-1}$ avec $D(x, y) = xD_A + yD_B$.

On a alors $D(x,y) = x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix}$.

7)$M(x, y)$ est inversible si et seulement si $D(x, y)$ est inversible.
Ainsi, $M(x, y)$ est inversible $\iff x \neq 0$ et $2x - y \neq 0$ et $3x - y \neq 0$.

8)On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, soit $B^2 = -B$.
Ainsi, $B^2 \in Vect(A, B)$ donc $B^2 \in E$.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & -8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix}$.
En identifiant A^2 avec $M(x, y)$, on trouve un système de 9 équations à 2 inconnues x et y, n'ayant pas de solution. Donc A^2 n'appartient pas à E.

Partie B

1)$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2)En prenant $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$, on a : $X_{n+1} = CX_n$.

En identifiant C avec $M(x, y)$, on trouve $3x = 3$ et $-2y = -6$, soit $x = 1$ et $y = 3$.
Donc $C = M(1, 3)$.

3)Soit $\mathscr{P}(n)$, la proposition : « $X_n = C^n X_0$ ».

• $\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $X_0 = C^0 X_0$ » , ce qui est vrai puisque $C^0 = I$.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= CX_n \\ &= C(C^n X_0) \text{ } \textit{par HR} \\ &= C^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $X_n = C^n X_0$.

4)Compte-tenu des résultats de la partie A, on a :
$D(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$.

Donc $D(1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puis,
$$\begin{aligned}
X_n &= C^n X_0 \\
&= M(1,3)^n X_0 \\
&= \left[PD(1,3)P^{-1}\right]^n X_0 \\
&= PD(1,3)^n P^{-1} X_0 \quad \text{par récurrence classique} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2(-1)^n & 0 \\ -1 & 3(-1)^n & 0 \\ -2 & 4(-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n \\ -1+3(-1)^n \\ -2+4(-1)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a donc $a_n = 1-2(-1)^n$, $b_n = -1+3(-1)^n$ et $c_n = -2+4(-1)^n$.

On remarquera que ces formules ne sont valables que pour $n \geq 1$ du fait que la formule matricielle donnée plus haut pour $D(1,3)^n$ n'est pas valide pour $n = 0$.

Exercice 2 (ecricome 2016)

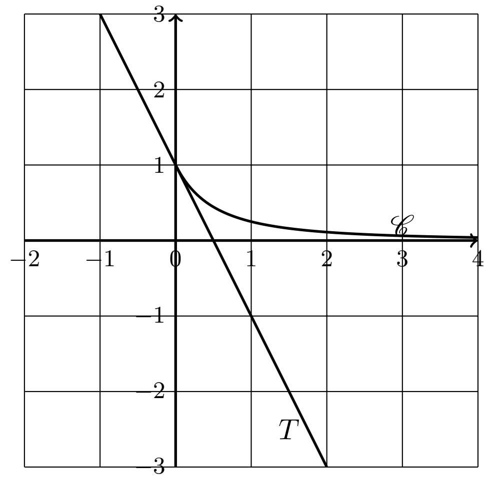
1)a)g_0 est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \geq 0 : g_0'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^3} < 0$.

Donc g_0 est décroissante sur $[0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^2 = +\infty$ donc par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = 0$.

La tangente T en 0 à g_0 a pour équation :

$y = g_0'(0)x + g_0(0)$, soit $y = -2x+1$.



b)g_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient, puissance et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{n\frac{1}{1+x}(ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(ln(1+x))^n}{(1+x)^4}. \\ &= \frac{(\ln(1+x))^{n-1}[n - 2\ln(1+x)]}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Pour tout $x \geq 0 : 1+x \geq 0$, $\ln(1+x) \geq 0$ et $(1+x)^3 > 0$.

Donc $g_n'(x) \geq 0 \iff n - 2\ln(1+x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x)$.

$g_n'(x) \geq 0 \iff \dfrac{n}{2} \geq \ln(1+x) \iff e^{n/2} \geq 1+x \iff x \leq e^{n/2}-1$.

Donc g_n est croissante sur $\left[0; e^{n/2}-1\right]$ et décroissante sur $\left[e^{n/2}-1; +\infty\right[$.

Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2} = 0 \ (c.c)$$

c)D'après la question 1)b), g_n admet un maximum M_n en $e^{n/2}-1$.
On a donc $M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \dfrac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \dfrac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.

Pour $n \geq 3e$, on a : $\dfrac{n}{2e} \geq \dfrac{3}{2}$, puis $\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$.
Donc $\forall n \geq 3e, M_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ donc par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = +\infty$.
d)Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} g_n(x)) &= \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} (1+x)^{3/2} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\end{aligned}$$

car $(1+x)^{3/2}$ est équivalent à $x^{3/2}$ quand $x \to +\infty$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} g_n(x)) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^{1/2}} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^{1/2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

par le même argument de croissances comparées que la question 1)b).
Donc pour $n \geq 1$, on a : $g_n(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ quand $x \to +\infty$.

2)a)Soit $A > 0$.
On a : $\displaystyle\int_0^A g_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A}$.
$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{1+A}\right) = 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)\mathrm{d}t = 1$.
b)L'intégrale I_n est impropre en $+\infty$.
Or, $g_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ converge puisque c'est une intégrale de Riemann de paramètre $3/2 > 1$.
Donc d'après le critère de négligeabilité sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ converge.
Enfin, $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale non impropre.
Donc d'après la propriété de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ converge.

Donc pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.

c)Soit $A > 0$.

Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$ $\qquad v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$.

$$u'(t) = \frac{n+1}{1+t}(\ln(1+t))^n \qquad v(t) = \frac{-1}{1+t}.$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$ donc l'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{-(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A - \int_0^A -\frac{n+1}{(1+t)^2}(\ln(1+t))^n\mathrm{d}t \\ &= \frac{-(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)\mathrm{d}t. \quad (*)\end{aligned}$$

On a : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{-(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ comme précédemment.

De plus, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\mathrm{d}t$

et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

Donc par passage à la limite dans (*), on tire :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$, soit : $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

d)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $I_n = n!$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car on a prouvé en 2)a) que $I_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier quelconque. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= (n+1)I_n \\ &= (n+1)n! \textit{ par HR} \\ &= (n+1)!\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N} : I_n = n!$

3)a)• $\forall x \in \mathbf{R} : f_n(x) \geq 0$.

• f_n est continue sur $]-\infty; 0[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la fonction nulle.

f_n est continue sur $[0; +\infty[$, g_n étant elle-même continue sur cet intervalle.
Donc f_n est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ converge donc aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$, de même nature.

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}I_n = 1.$

• On conclut que f_n est une densité de probabilité.

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{xf_n(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2f_n(x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!(1+x)^2}{x^2(\ln(1+x))^n} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{(\ln(1+x))^n} \ \mathit{car}\ (1+x)^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} o(xf_n(x))$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ diverge donc d'après le critère de négligeabilité sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf_n(x)\mathrm{d}x$ diverge.
Donc X_n n'admet pas d'espérance.

c)$\forall x<0, F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$ car f_n est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Ainsi, $F_n(x) = 0$ pour $x<0$.

d)Soit $x \geq 0$.

On a
$$\begin{aligned}F_0(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^x g_0(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{1+x}.\end{aligned}$$

e)Soit $x \geq 0$ et $k \in \mathbf{N}^*$.

Posons $h(x) = F_k(x) - F_{k-1}(x) + \dfrac{1}{k!}\dfrac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x}$.

f_k et f_{k-1} étant continues sur $[0, +\infty[$, F_k et F_{k-1} sont dérivables sur $[0, +\infty[$. Donc h est dérivable sur $[0, +\infty[$.

De plus, on a :

$h'(x)$

$$= F_k'(x) - F_{k-1}'(x) + \frac{1}{k!}\frac{\frac{k}{1+x}\big(\ln(1+x)\big)^{k-1}(1+x) - \big(\ln(1+x)\big)^k}{(1+x)^2}$$
$$= f_k(x) - f_{k-1}(x) + \frac{1}{k!}\frac{k\big(\ln(1+x)\big)^{k-1} - \big(\ln(1+x)\big)^k}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{1}{k!}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{(1+x)^2} - \frac{1}{(k-1)!}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^{k-1}}{(1+x)^2} + \frac{1}{k!}\frac{k\big(\ln(1+x)\big)^{k-1} - \big(\ln(1+x)\big)^k}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!(1+x)^2} - \frac{\big(\ln(1+x)\big)^{k-1}}{(k-1)!(1+x)^2} + \frac{k\big(\ln(1+x)\big)^{k-1}}{k!(1+x)^2} - \frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!(1+x)^2}$$
$= 0$ puisque $k! = (k-1)!k$.

Donc h est constante sur $[0, +\infty[$.

Or, $h(0) = F_k(0) - F_{k-1}(0)$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} F_k(x) - \lim\limits_{x\to 0^-} F_k(x)$ par continuité de F_k et F_{k-1} sur $\mathbf{R}$

$= 0$ par la question 3)c).

Ainsi, pour tout $x \geq 0, h(x) = 0$, ce qui prouve que :

$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$.

f)Soit $x \geq 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

En sommant les égalités précédentes pour k allant de 1 à n, on tire :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k!}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x}$.

Soit, $F_n(x) - F_0(x) = -\dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$, par télescopage.

D'où $F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$.

g)Pour $x \in \mathbf{R}$ fixé, la série de terme général $\dfrac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$ est une série exponentielle (convergente) de paramètre $\ln(1+x)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1+x}e^{\ln(1+x)} = 0$.

h)Pour $x < 0$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et pour $x \geq 0$ fixé, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X.
Soit F la fonction de répartition de X.
En tout point x où F est continue, on a par définition de la convergence en loi : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$, c'est-à-dire $0 = F(x)$.
Ceci est incompatible avec le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas en loi.

4)a)X_n est à support dans $\mathbf{R}_+$ car f_n est nulle sur $\mathbf{R}_-^*$.
Donc $X_n \geq 0$, puis $1 + X_n \geq 1$, ce qui définit $\ln(1+X_n)$ donc Y_n.
$X_n(\Omega) = [0, +\infty[$ donc $(1+X_n)(\Omega) = [1, +\infty[$, puis $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$.

4)b)D'après le théorème de transfert, Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+x) f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Comme f_n est nulle sur $]-\infty, 0[$, cela revient à montrer la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+x) f_n(x)\mathrm{d}x$, c'est-à-dire la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n+1}}{n!(1+x)^2}\mathrm{d}x$, laquelle converge et vaut $\dfrac{1}{n!}I_{n+1}$.
Donc Y_n admet une espérance et $E(Y_n) = \dfrac{1}{n!}I_{n+1} = \dfrac{1}{n!}(n+1)! = n+1$.

4)c)Y_n admet une variance si et seulement si Y_n^2 admet une espérance.
D'après le théorème de transfert, cela se produit si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\ln(1+x)\big)^2 f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n+2}}{n!(1+x)^2}\mathrm{d}x$ converge, laquelle converge et vaut $\dfrac{1}{n!}I_{n+2}$.
Donc Y_n^2 admet une espérance et on a :
$E(Y_n^2) = \dfrac{1}{n!}I_{n+2} = \dfrac{1}{n!}(n+2)! = (n+1)(n+2)$.
D'après la formule de Koënig, Y_n admet une variance donnée par :
$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1$.

4)d)Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= P\big(Y_n \leq x\big) \\ &= P\big(\ln(1+X_n) \leq x\big) \\ &= P\big(1 + X_n \leq e^x\big) \\ &= P\big(X_n \leq e^x - 1\big) \\ &= F_n\big(e^x - 1\big). \end{aligned}$$

4)e)Remarquons que H_n est la composée de $h : x \mapsto e^x - 1$ suivie de F_n.
h et F_n sont continues sur $\mathbf{R}$. Par composée, H_n est continue sur $\mathbf{R}$.

h est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et F_n est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.
Par composée, H_n est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.

Donc Y_n est une variable aléatoire à densité.

Une densité h_n de Y_n est donnée pour tout $x \neq 0$ par :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= H_n'(x) \\ &= e^x F_n'(e^x - 1) \\ &= e^x f_n(e^x - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } e^x - 1 < 0, \\ \\ \dfrac{e^x}{n!} g_n(e^x - 1) & \text{si } e^x - 1 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $e^x - 1 < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$.

Et pour tout $x > 0$, $g_n(e^x - 1) = \dfrac{\big(\ln(1 + e^x - 1)\big)^n}{(1 + e^x - 1)^2} = \dfrac{x^n}{e^{2x}}$.

Finalement, $h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

4)f)Une densité h_0 de Y_0 est donnée par : $h_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

On reconnaît la densité de la loi $\mathscr{E}(1)$.

D'après le théorème de transfert, Y_0 admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k h_0(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme h_0 est nulle sur $]-\infty, 0[$, cela revient à montrer la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x$, c'est-à-dire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} k! h_k(x)\mathrm{d}x$.

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_k(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1, puisque h_k est une densité.

Finalement, Y_0 admet un moment d'ordre k donné par :
$\mathscr{M}_k(Y_0) = E\big(Y_0^k\big) = k!$.

Exercice 3 (ecricome 2016)

Résultats préliminaires

1)On suppose X et Y indép., de même loi. Pour tout $(i,j)\in\mathbf{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned} P(X=i\cap Y=j) &= P(X=i)P(Y=j) \text{ par indépendance}\\ &= P(Y=i)P(X=j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi}\\ &= P(X=j)P(Y=i)\\ &= P(X=j\cap Y=i) \text{ par indépendance.}\end{aligned}$$

Donc X et Y sont échangeables.

2)On suppose que X et Y sont échangeables. Pour tout $(i,j)\in\mathbf{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i\cap Y=j) \text{ avec probas totales sce } (Y=j)_{j\in\mathbf{N}}\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=j\cap Y=i) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont échangeables}\\ &= P(Y=i) \text{ avec probas totales sce } (X=j)_{j\in\mathbf{N}}.\end{aligned}$$

Etude d'un exemple

3)a)La probabilité de tirer une blanche est $b/(b+n)$, d'où le programme :

```
import numpy.random as rd
def tirage(b,n):
    r=rd.rand()
    if r<b/(b+n):
        res=2
    else:
        res=1
    return res
```

3)b)

```
def experience(b,n,c,variante):
    x=tirage(b,n)
    if variante==1:
        if x==1:
            n=n+c
        else:
            b=b+c
    if variante==2:
        if x==1:
            b=b+c
        else:
            n=n+c
    y=tirage(b,n)
    return(x,y)
```

3)c)

```
def estimation(b,n,c,variante,N):
    loiX=np.zeros(shape=(1,2))
    loiY=np.zeros(shape=(1,2))
    loiXY=np.zeros(shape=(2,2))
    for k in range(N):
        (x,y)=experience(b,n,c,variante)
        loiX[0,x-1]=loiX[0,x-1]+1
        loiY[0,y-1]=loiY[0,y-1]+1
        loiXY[x-1,y-1]=loiXY[x-1,y-1]+1
    loiX=loiX/N
    loiY=loiY/N
    loiXY=loiXY/N
    return(loiX,loiY,loiXY)
```

3)d)Ici, comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1,2\}$, X et Y sont :

– échangeables si $P(X = 1 \cap Y = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1)$,

– indép. si $\forall (i,j) \in \{1,2\}^2$, $P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$.

• Variante 1

$P(X = 1 \cap Y = 2) \approx 0.16785$ et $P(X = 2 \cap Y = 1) \approx 0.16697$ donc $P(X = 1 \cap Y = 2)$ et $P(X = 2 \cap Y = 1)$ sont très proches.

On peut conjecturer que X et Y sont échangeables.

En revanche, $P(X = 1)P(Y = 1) \approx \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \approx \frac{4}{9} \approx 0.44$ et $P(X = 1 \cap Y = 1) \approx 0.5$ sont sensiblement différentes.

On peut conjecturer que X et Y ne sont pas indépendantes.

• Variante 2

$P(X = 1 \cap Y = 2) \approx 0.33$ et $P(X = 2 \cap Y = 1) \approx 0.25$ donc $P(X = 1 \cap Y = 2)$ et $P(X = 2 \cap Y = 1)$ sont sensiblement différentes.

On peut conjecturer que X et Y ne sont pas échangeables.

De plus, $P(X = 1)P(Y = 1) \approx 0.66 \times 0.58 \approx 0.38$ et $P(X = 1 \cap Y = 1)$ ≈ 0.33 sont sensiblement différentes.

On peut conjecturer que X et Y ne sont pas indépendantes.

• Variante 3

$P(X = 1 \cap Y = 2) \approx 0.22098$ et $P(X = 2 \cap Y = 1) \approx 0.22312$ donc $P(X = 1 \cap Y = 2)$ et $P(X = 2 \cap Y = 1)$ sont très proches.

On peut donc conjecturer que X et Y sont échangeables.

$P(X = 1)P(Y = 1) \approx 0.66 \times 0.66 \approx 0.44$ et $P(X = 1 \cap Y = 1) \approx 0.44466$ sont très proches.

Idem pour $P(X = 1)P(Y = 2)$ et $P(X = 1 \cap Y = 2)$, $P(X = 2)P(Y = 1)$ et $P(X = 2 \cap Y = 1)$ ainsi que $P(X = 2)P(Y = 2)$ et $P(X = 2 \cap Y = 2)$.

On peut donc conjecturer que X et Y sont indépendantes.

4)a)$X(\Omega) = \{1, 2\}$.

$P(X = 1) = P(N_1) = \dfrac{n}{b+n}$ et $P(X = 2) = P(B_1) = \dfrac{b}{b+n}$.

4)b)$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(X = 1)P_{(X=1)}(Y = 1) = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{n+c}{b+n+c}$,

$P(X = 1 \cap Y = 2) = P(X = 1)P_{(X=1)}(Y = 2) = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{b}{b+n+c}$,

$P(X = 2 \cap Y = 1) = P(X = 2)P_{(X=2)}(Y = 1) = \dfrac{b}{b+n} \times \dfrac{n}{b+n+c}$,

$P(X = 2 \cap Y = 2) = P(X = 2)P_{(X=2)}(Y = 2) = \dfrac{b}{b+n} \times \dfrac{b+c}{b+n+c}$.

4)c)$Y(\Omega) = \{1, 2\}$.

La formule des probabilités totales pour le sce $\big((X = 1), (X = 2)\big)$ donne :

$$\begin{aligned}
P(Y = 1) &= P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = 2 \cap Y = 1)\\
&= \frac{n}{b+n} \times \frac{n+c}{b+n+c} + \frac{b}{b+n} \times \frac{n}{b+n+c}\\
&= \frac{n(n+c)+bn}{(b+n)(b+n+c)}\\
&= \frac{n(n+c+b)}{(b+n)(b+n+c)}\\
&= \frac{n}{b+n}.
\end{aligned}$$

Puis, $P(Y = 2) = 1 - P(Y = 1) = 1 - \dfrac{n}{b+n} = \dfrac{b}{b+n}$.

4)d)Les calculs de 4)b) donnent : $P(X = 1 \cap Y = 2) = P(X = 2 \cap Y = 1)$.
Donc X et Y sont échangeables.

Par ailleurs, $P(X = 1)P(Y = 1) = \dfrac{n^2}{(b+n)^2}$

et $P(X = 1 \cap Y = 1) = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{n+c}{b+n+c}$. semblent être différents.

En effet, $P(X = 1)P(Y = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1)$

$\iff \dfrac{n^2}{(b+n)^2} = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{n+c}{b+n+c}$

$\iff \dfrac{n}{b+n} = \dfrac{n+c}{b+n+c}$

$\iff n(b+n+c) = (b+n)(n+c)$

$\iff nb + n^2 + nc = bn + bc + n^2 + nc$

$\iff bc = 0$, ce qui est impossible.

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.