
Correction DS7 - ecg2 - maths appliquées

Problème

Partie A (matrice de Vandermonde)

1) Si deux des trois réels a, b, c sont égaux, V possède alors deux de ses lignes identiques et n'est pas inversible, son rang étant inférieur ou égal à 2.

2) Pour tout polynôme P et Q de $\mathbf{R}_2[X]$, pour tout réel λ , on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(a), (\lambda P + Q)(b), (\lambda P + Q)(c)) \\ &= (\lambda P(a) + Q(a), \lambda P(b) + Q(b), \lambda P(c) + Q(c)) \\ &= \lambda(P(a), P(b), P(c)) + (Q(a), Q(b), Q(c)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

3)a) Supposons a, b, c distincts 2 à 2.

Soit $P \in \text{Ker } f$. Alors, $f(P) = 0$, ce qui se traduit par :

$$P(a) = P(b) = P(c) = 0.$$

P est de degré inférieur ou égal à deux et admet 3 racines distinctes.

C'est impossible, à moins que P soit le polynôme nul. Ainsi, $\text{Ker } f = \{0\}$.

$$b) f(e_0) = (e_0(a), e_0(b), e_0(c)) = (1, 1, 1) = 1\epsilon_1 + 1\epsilon_2 + 1\epsilon_3,$$

$$f(e_1) = (e_1(a), e_1(b), e_1(c)) = (a, b, c) = a\epsilon_1 + b\epsilon_2 + c\epsilon_3,$$

$$f(e_2) = (e_2(a), e_2(b), e_2(c)) = (a^2, b^2, c^2) = a^2\epsilon_1 + b^2\epsilon_2 + c^2\epsilon_3.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = V.$$

c) La question 1) donne par contraposée :

V inversible $\implies a, b, c$ distincts 2 à 2.

Réciproquement, supposons a, b, c sont distincts 2 à 2.

D'après la question 3)a), l'application linéaire f est injective. De plus, ses espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont la même dimension (3 en l'occurrence) donc f est bijective.

Comme $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = V$, cela entraîne l'inversibilité de V .

D'où l'équivalence demandée.

$$Q_0(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad Q_1(x) = \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad Q_2(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

4)a) On remarque que :

$$Q_0(a) = \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} = 1, \quad Q_0(b) = \frac{(b-b)(b-c)}{(a-b)(a-c)} = 0 \quad \text{et} \quad Q_0(c) = \frac{(c-b)(c-c)}{(a-b)(a-c)} = 0.$$

Donc $f(Q_0) = (Q_0(a), Q_0(b), Q_0(c)) = (1, 0, 0) = \epsilon_1$.

Par le même raisonnement, on obtient : $f(Q_1) = \epsilon_2$ et $f(Q_2) = \epsilon_3$.

b) Comme les réels a, b, c sont distincts 2 à 2, on sait d'après la question 3) que f est bijective, ce qui assure l'existence de f^{-1} .

La question 4)a) donne $\forall i \in \{0, 1, 2\}, f^{-1}(\epsilon_{i+1}) = Q_i$.

Pour trouver la matrice de f^{-1} dans les bases \mathcal{C} et \mathcal{B} , il faut donc écrire chaque polynôme Q_i comme combinaison linéaire des polynômes de \mathcal{B} .

On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\epsilon_1) &= Q_0(x) \\ &= \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \\ &= \frac{bc - (b+c)x + x^2}{(a-b)(a-c)} \\ &= \frac{bc}{(a-b)(a-c)}e_0 - \frac{b+c}{(a-b)(a-c)}e_1 + \frac{1}{(a-b)(a-c)}e_3 \\ &= \frac{bc}{(b-a)(c-a)}e_0 - \frac{b+c}{(b-a)(c-a)}e_1 + \frac{1}{(b-a)(c-a)}e_3 \\ &= \frac{bc(c-b)}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_0 - \frac{(b+c)(c-b)}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_1 + \frac{c-b}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_3 \\ &= \frac{bc(c-b)}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_0 + \frac{b^2-c^2}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_1 + \frac{c-b}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_3. \end{aligned}$$

On obtient de même, par symétrie, en échangeant le rôle de a, b, c :

$$f^{-1}(\epsilon_2) = \frac{ac(a-c)}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_0 + \frac{c^2-a^2}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_1 + \frac{a-c}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_3.$$

$$f^{-1}(\epsilon_3) = \frac{ab(b-a)}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_0 + \frac{a^2-b^2}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_1 + \frac{b-a}{(c-b)(b-a)(c-a)}e_3.$$

$$\text{On déduit : } \mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{bc(c-b)}{(c-b)(b-a)(c-a)} & \frac{ac(a-c)}{(c-b)(b-a)(c-a)} & \frac{ab(b-a)}{(c-b)(b-a)(c-a)} \\ \frac{b^2-c^2}{(c-b)(b-a)(c-a)} & \frac{c^2-a^2}{(c-b)(b-a)(c-a)} & \frac{a^2-b^2}{(c-b)(b-a)(c-a)} \\ \frac{c-b}{(c-b)(b-a)(c-a)} & \frac{a-c}{(c-b)(b-a)(c-a)} & \frac{b-a}{(c-b)(b-a)(c-a)} \end{pmatrix}.$$

Comme $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, alors $V^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1})$, matrice ci-dessus qu'on peut réécrire sous la forme :

$$V^{-1} = \frac{1}{(c-b)(b-a)(c-a)} \begin{pmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{pmatrix}.$$

Partie B (étude d'un exemple de graphe)

5)a) La matrice d'adjacence A de G est la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ dont le coefficient a_{ij} situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j .

$$\text{On trouve : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Ce graphe ne comporte pas de boucle, ce qui explique que la diagonale de A est formée de zéros. De plus, comme c'est le cas pour tout graphe non orienté, A est symétrique.

b) A est symétrique donc diagonalisable.

c)i. La deuxième colonne et la quatrième colonnes sont identiques donc

$$rg(A) = \dim \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour tous réels u, v, w , on a :

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0.$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

C'est aussi une famille génératrice du Vect donc une base du Vect .

Ainsi, $rg(A) = 3$.

c)ii. $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, mais $rg(A) = 3 < 4$. Donc A n'est pas inversible, ce qui prouve que 0 est valeur propre de A .

Le cours donne : $\dim E_0(A) + \underbrace{rg(A)}_{=3} = 4$. Donc $\dim E_0(A) = 1$.

d) $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (A + I)U = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$(A + I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 & L_1 \\ x + y + z = 0 & L_2 \\ x + z + t = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z + t = 0 & L_1 \\ x + z = 0 & L_2 \\ y = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 0 \\ x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid y = t = 0 \text{ et } x = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

$$\text{D'où } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ ce qui confirme que } -1$$

est bien valeur propre de A .

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_{-1}(A)$ et libre car constituée

d'un seul vecteur non nul.

C'est donc une base de $E_{-1}(A)$ et $\dim E_{-1}(A) = 1$.

e) On sait déjà que A possède deux valeurs propres qui sont 0 et -1 .

Supposons qu'elle n'ait que ces deux là.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut alors :

$$\dim E_0(A) + \dim E_{-1}(A) = 1 + 1 = 2 < 4, \text{ alors que } A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R}).$$

Cela entraîne que A n'est pas diagonalisable et contredit la question 5)b).

Donc A possède au moins trois valeurs propres.

f) Comme $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, on peut dire que A a au plus 4 valeurs propres.

D'après la question précédente, elle en admet donc 3 ou 4.

Supposons que A possède exactement trois valeurs propres 0 , -1 qu'on connaît déjà, ainsi qu'une troisième λ distincte des deux autres.

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible dont :

- la première colonne est formée d'une base de $E_0(A)$,
- la deuxième colonne est formée d'une base de $E_{-1}(A)$,
- les troisièmes et quatrièmes colonnes sont formées d'une base de $E_\lambda(A)$,

ainsi qu'une matrice D diagonale dont la diagonale est formée dans l'ordre des valeurs propres 0 , -1 et λ (comptée deux fois), telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On a alors : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

Comme A et D sont semblables, elles ont même trace.

Or, $Tr(A) = 0$ et $Tr(D) = -1 + 2\lambda$. On a donc $-1 + 2\lambda = 0$, soit $\lambda = \frac{1}{2}$.

Il reste à vérifier que $\frac{1}{2}$ n'est pas une valeur propre de A en montrant par exemple que $A - \frac{1}{2}I$ est inversible, ce qui mène à une contradiction.

On conclut que A possède 4 valeurs propres.

6)a) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

b) $5A^2 + 4A = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 5 & 10 \\ 10 & 5 & 15 & 5 \\ 5 & 10 & 5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$

Et on retombe sur la matrice A^4 .

Donc $A^4 = 5A^2 + 4A$.

Posons $P(X) = X^4 - 5X^2 - 4X$.

Alors, $P(A) = A^4 - 5A^2 - 4A = 0$ grâce à ce qui précède.

Donc P est un polynôme annulateur de A .

c)i. $P(X) = X^4 - 5X^2 - 4X = X(X^3 - 5X - 4) = X(X+1)(X^2 - X - 4)$.

Les racines de P sont 0, -1, ainsi que les racines de $X^2 - X - 4$, à savoir

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ et } \frac{1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Comme P est un polynôme annulateur de A , on a donc :

$$sp(A) \subset \left\{ 0, -1, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

D'après 5)f), le spectre de A est de cardinal 4.

L'inclusion ci-dessus entraîne que $sp(A) = \left\{ 0, -1, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right\}$.

On a alors : $\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$.

Enfin, de l'encadrement $4 < \sqrt{17} < 5$, on déduit :

$$5 < 1 + \sqrt{17} < 6, \text{ puis } \frac{5}{2} < \alpha < 3.$$

$$-5 < -\sqrt{17} < -4, \text{ puis } -4 < 1 - \sqrt{17} < -3 \text{ et } -2 < \beta < -\frac{3}{2}.$$

c)ii. Les calculs sont immédiats :

$$\alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} + \frac{1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{1 + \sqrt{17} + 1 - \sqrt{17}}{2} = 1$$

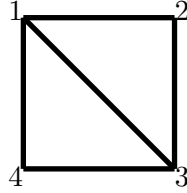
$$\alpha\beta = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \times \frac{1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{17})(1 - \sqrt{17})}{4} = \frac{1^2 - (\sqrt{17})^2}{4} = -4$$

Les réels α et β sont par construction les racines du polynôme $X^2 - X - 4$.

Donc $\alpha^2 - \alpha - 4 = \beta^2 - \beta - 4 = 0$, d'où $\alpha^2 = 4 + \alpha$ et $\beta^2 = 4 + \beta$.

Partie C (étude d'une suite)

7)a)



Il y a 10 chaînes de longueur 1 de G qui sont :

$1 - 2, 2 - 1, 1 - 3, 3 - 1, 1 - 4, 4 - 1, 3 - 4, 4 - 3, 2 - 3$ et $3 - 2$.

Donc $c_1 = 10$.

Remarque

Il peut être tentant de répondre $c_1 = 5$ du fait qu'il y a 5 arêtes.

Cependant, une arête est une paire de sommets voisins. C'est pourquoi $\{1 - 2\}$ et $\{2 - 1\}$ représente la même arête.

En revanche, les chaînes $1 - 2$ et $2 - 1$ sont différentes, puisqu'une chaîne est définie comme une suite de sommets voisins avec une origine et une extrémité.

b) D'après le cours, le coefficient (i, j) de la matrice A^n est le nombre de chaînes de longueur n de G joignant le sommet i au sommet j .

La somme de tous les coefficients de A^n représente donc le nombre de chaînes de longueur n de G .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } c_2 = 26.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } c_3 = 66.$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 14 & 9 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \end{pmatrix} \text{ donc } c_4 = 170.$$

c) Les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 1 et 4 sont :

$1 - 4 - 1 - 4, 1 - 4 - 3 - 4, 1 - 3 - 1 - 4, 1 - 2 - 1 - 4, 1 - 2 - 3 - 4$.

Remarque

Il y en a 5, ce que confirme le cours, puisque c'est le coefficient $(1,4)$ de la matrice A^3 .

8) La question 6)b) donne : $A^4 = 5A^2 + 4A$.

En multipliant membre à membre par A^{n-1} , on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$A^{n-1}A^4 = A^{n-1}(5A^2 + 4A), \text{ c'est-à-dire : } A^{n+3} = 5A^{n+1} + 4A^n \quad (*)$$

L'application $S : \mathcal{M}_4(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ qui à toute matrice $M = (m_{ij})$ associe la

somme de ses coefficients $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}$ est linéaire (s'en persuader...)

On a alors :

$$\begin{aligned} c_{n+3} &= S(A^{n+3}) \\ &= S(5A^{n+1} + 4A^n) \\ &= 5S(A^{n+1}) + 4S(A^n) \quad \text{car } S \text{ est linéaire} \\ &= 5c_{n+1} + 4c_n. \end{aligned}$$

$$9) U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$a) \text{ La question 7) donne : } X_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$BX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ 4c_n + 5c_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or, } c_{n+3} = 5c_{n+1} + 4c_n \text{ donc } BX_n = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ c_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

b) On raisonne par récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $X_n = B^{n-1}X_1$ ».

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit : « $X_1 = B^0X_1$ », ce qui est vrai car $B^0 = I$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= BX_n \quad \text{d'après la question 9)a)} \\ &= B(B^{n-1}X_1) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= B^nX_1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $X_n = B^{n-1}X_1$.

c) U_1 est non nul.

$$\text{De plus, } BU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -U_1.$$

Donc U_1 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1 .

$$d) BU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 4 + 5\alpha \end{pmatrix}.$$

Or, $\alpha^2 = 4 + \alpha$.

Donc $\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(4 + \alpha) = 4\alpha + \alpha^2 = 4\alpha + 4 + \alpha = 4 + 5\alpha$.

$$\text{On poursuit le calcul : } BU_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \alpha U_2.$$

$$BU_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ 4 + 5\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix} = \beta U_3.$$

U_2 et U_3 sont non nuls.

Les égalités ci-dessus prouvent que U_2 et U_3 sont des vecteurs propres de B associées respectivement aux valeurs propres α et β .

e) (U_1, U_2, U_3) est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont les vecteurs sont des vecteurs propres de B associés à des valeurs propres différentes.

C'est donc une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Le cardinal de cette famille coïncide avec la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Donc B est diagonalisable.

Remarque

On pouvait aussi évoquer que $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ a 3 valeurs propres distinctes.

f) B est diagonalisable donc il existe une matrice P inversible et D une matrice diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.

Les 3 valeurs propres de B étant distinctes, les sous-espaces propres de B sont de dimension 1. Les familles (U_1) , (U_2) et (U_3) sont alors des bases respectives de $E_{-1}(A)$, $E_\alpha(A)$ et $E_\beta(A)$.

$$\text{Il est donc légitime de prendre : } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

g) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\ll B^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1} \gg$.

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit : $\ll B^0 = PD^0P^{-1} \gg$, ce qui est vrai puisque $B^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} B^n &= B^{n-1}B \\ &= PD^{n-1}P^{-1}PDP^{-1} \quad \text{par HR et par 9)f)} \\ &= PD^{n-1}IDP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $B^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$.

h) On a vu dans la partie A que si a, b, c sont distincts 2 à 2, alors la matrice

$V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse égale à :

$$V^{-1} = \frac{1}{(c-b)(b-a)(c-a)} \begin{pmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ b^2 - c^2 & c^2 - a^2 & a^2 - b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{pmatrix} \quad (*)$$

Comme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}$, on a : ${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix}$.

tP est une matrice de Vandermonde V avec $a \rightarrow -1, b \rightarrow \alpha$ et $c \rightarrow \beta$.

tP est inversible pour deux raisons : d'une part du fait que P est inversible, d'autre part du fait que $-1, \alpha$ et β sont distincts deux à deux.

En appliquant (*), on obtient :

$$({}^tP)^{-1} = \frac{1}{(\beta - \alpha)(\alpha + 1)(\beta + 1)} \begin{pmatrix} \alpha\beta(\beta - \alpha) & -\beta(-1 - \beta) & -\alpha(\alpha + 1) \\ \alpha^2 - \beta^2 & \beta^2 - 1 & 1 - \alpha^2 \\ \beta - \alpha & -1 - \beta & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Or, $P^{-1} = {}^t({}^t(P^{-1})) = {}^t(({}^tP)^{-1})$.

En transposant la grosse matrice du dessus, on a alors :

$$P^{-1} = \frac{1}{(\beta - \alpha)(\alpha + 1)(\beta + 1)} \begin{pmatrix} \alpha\beta(\beta - \alpha) & \alpha^2 - \beta^2 & \beta - \alpha \\ -\beta(-1 - \beta) & \beta^2 - 1 & -1 - \beta \\ -\alpha(\alpha + 1) & 1 - \alpha^2 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

On simplifie un peu cette matrice en utilisant la question 6)d) :

$$(\beta - \alpha)(\alpha + 1)(\beta + 1) = (\beta - \alpha) \underbrace{(\alpha\beta)}_{-4} + \underbrace{(\alpha + \beta + 1)}_1 = -2(\beta - \alpha) = 2(\alpha - \beta)$$

$$\alpha\beta(\beta - \alpha) = -4(\beta - \alpha) = 4(\alpha - \beta)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$$

$$-\beta(-1 - \beta) = \beta + \beta^2 = \beta + (4 + \beta) = 4 + 2\beta$$

$$\beta^2 - 1 = (4 + \beta) - 1 = 3 + \beta$$

$$-\alpha(\alpha + 1) = -\alpha^2 - \alpha = -(4 + \alpha) - \alpha = -4 - 2\alpha$$

$$1 - \alpha^2 = 1 - (4 + \alpha) = -3 - \alpha.$$

On obtient alors une expression un peu plus simple :

$$P^{-1} = \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 4(\alpha - \beta) & \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ 4 + 2\beta & 3 + \beta & -\beta - 1 \\ -4 - 2\alpha & -3 - \alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin, } P^{-1}X_1 &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 4(\alpha - \beta) & \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ 4 + 2\beta & 3 + \beta & -\beta - 1 \\ -4 - 2\alpha & -3 - \alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 66 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 40(\alpha - \beta) + 26(\alpha - \beta) + 66(\beta - \alpha) \\ 10(4 + 2\beta) + 26(3 + \beta) + 66(-\beta - 1) \\ 10(-4 - 2\alpha) + 26(-3 - \alpha) + 66(\alpha + 1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 0 \\ 52 - 20\beta \\ 20\alpha - 52 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

i) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$ d'après les questions 9)b) et 9)g)

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 0 \\ 52 - 20\beta \\ 20\alpha - 52 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & \alpha^{n-1} & \beta^{n-1} \\ (-1)^n & \alpha^n & \beta^n \\ (-1)^{n+1} & \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 52 - 20\beta \\ 20\alpha - 52 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} (52 - 20\beta)\alpha^{n-1} + (20\alpha - 52)\beta^{n-1} \\ (52 - 20\beta)\alpha^n + (20\alpha - 52)\beta^n \\ (52 - 20\beta)\alpha^{n+1} + (20\alpha - 52)\beta^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En prenant la première composante de X_n , on obtient après simplification :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, c_n = \frac{(26 - 10\beta)\alpha^{n-1} + (10\alpha - 26)\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}.$$

j) Réécrivons c_n sous une autre forme :

$$c_n = \frac{(26 - 10\beta)}{\alpha - \beta} \alpha^{n-1} + \frac{10\alpha - 26}{\alpha - \beta} \beta^{n-1} = \frac{(26 - 10\beta)}{\alpha(\alpha - \beta)} \alpha^n + \frac{10\alpha - 26}{\alpha(\alpha - \beta)} \beta^n.$$

En posant $K = \frac{(26 - 10\beta)}{\alpha(\alpha - \beta)}$ et $L = \frac{10\alpha - 26}{\alpha(\alpha - \beta)}$, on a :

$$c_n = K\alpha^n + L\beta^n.$$

On déduit : $\frac{c_n}{K\alpha^n} = \frac{K\alpha^n + L\beta^n}{K\alpha^n} = 1 + \frac{L}{K} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$.

$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 - \sqrt{17}}{1 + \sqrt{17}} \in] -1, 0[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{K\alpha^n} = 1$, ce qui prouve que $c_n \underset{+\infty}{\sim} K\alpha^n$.

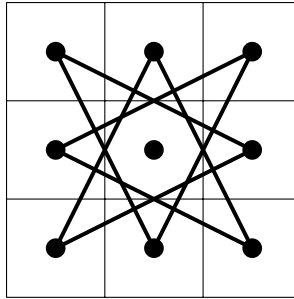
Par ailleurs, $26 - 10\beta > 0$ car $\beta < 0$ et $\alpha(\alpha - \beta) > 0$ car $\alpha > 0$ et $\alpha > \beta$.

Donc $K > 0$.

Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} K\alpha^n = +\infty$ car $K > 0$ et $\alpha > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$.

Partie D (le problème du cavalier)

10)a) Graphe :



b) G n'est pas connexe car aucune chaîne ne passe par le sommet central.

11)a) On place dans chacune des cases le degré du sommet correspondant :

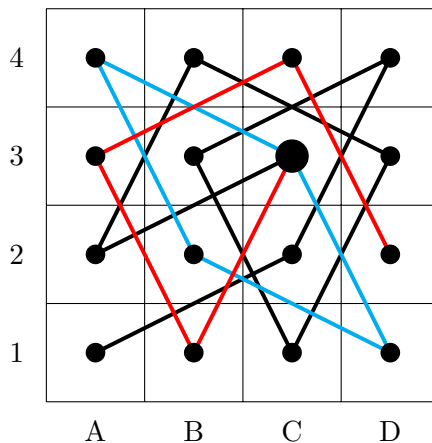
2	3	3	2
3	4	4	3
3	4	4	3
2	3	3	2

b) D'après le lemme des poignées de mains, on a :

$$\sum_{x \in S} \deg(x) = 2 \times \text{nombre d'arêtes.}$$

$$\text{Donc nombre d'arêtes} = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} \deg(x) = \frac{1}{2} \times (10 + 14 + 14 + 10) = 24. G.$$

c)i. Chaîne qui part de A1 et passe par tous les sommets de G .



Chaîne = A1-C2-D4-B3-C1-D3-B4-A2-C3-A4-B2-D1-C3-B1-A3-C4-D2

Il y a plein de chaînes possibles. Une stratégie peut consister à partir vers la bande de l'échiquier, là où les sommets ont le degré le plus faible.

J'ai été obligé de faire repasser la chaîne par un sommet déjà visité, en l'occurrence C3 ici. On verra dans la question 11)d) que c'est normal puisque G ne possède aucune chaîne hamiltonienne.

ii. On a trouvé une chaîne qui passe par tous les sommets de G .

Cela signifie que G est connexe, puisque qu'avec cette chaîne, on est alors capable de relier entre eux deux sommets quelconques de G .

d) L'échiquier est divisé en trois parties : les 4 cases centrales, les 8 cases de la bande (sans les coins) et les 4 coins.

Remarquons les deux points suivants :

- toute arête dont l'origine est un coin a pour extrémité un sommet central (un cavalier dans le coin ne peut sauter que vers le centre),
- toute arête dont l'extrémité est un coin a pour origine un sommet central (si un cavalier arrive dans le coin, c'est qu'il venait d'une case centrale).

Supposons que G possède une chaîne hamiltonienne. Elle doit donc passer par tous les sommets de l'échiquier, une et une seule fois par sommet.

Deux types de chaînes sont alors possibles :

- la chaîne part d'un coin :

coin1-**centre**-bande- -**centre**-coin2-**centre**-bande-...-**centre**-coin3-**centre**-
... etc ...

On voit que cette chaîne visite au minimum 5 cases centrales, ce qui signifie que l'une des cases centrales a été visité plus d'une fois. Cette chaîne n'est pas hamiltonienne.

- la chaîne ne part pas d'un coin :

... -**centre**-coin1-**centre**-bande-...-**centre**-coin2-**centre**-bande-...-**centre**-coin3-
...etc... Et on a la même conclusion.

12)a)i. programme

```
def voisins(sommet,S):
    mouvement=[[1,2],[1,-2],[-1,2],[-1,-2],[2,1],[2,-1],[-2,1],[-2,-1]]
    liste=[]
    for m in mouvement:
        a=sommet[0]+m[0]
        b=sommet[1]+m[1]
        if [a,b]in S:
            liste.append([a,b])
    return liste
```

ii. Le test évite que le cavalier ne sorte de l'échiquier ou des cases de S.

b)i. La fonction renvoie le nombre de voisins d'un sommet donné, qui sont présents dans un ensemble S de sommets.

ii. S est alors l'ensemble de tous les sommets de l'échiquier, ce nombre total de voisins du sommet est le degré du sommet.

iii. La fonction renvoie le nombre de voisins du sommet [3,2] (case C2) qui sont parmi les cases centrales.

Un cavalier partant de la case C2 peut aller en E1, E3, D4, B4, A3 ou A1 . Seules les cases B4 et D4 sont parmi les 9 cases centrales B2-C2-D2-B3-C3-D3-B4-C4-D4. La fonction renvoie donc la valeur 2.

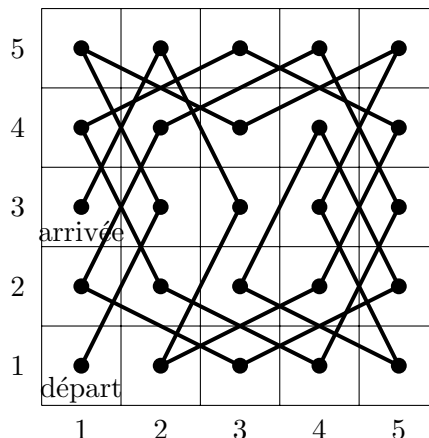
c)i. L'algorithme passe en revue tous les voisins du sommet en stockant en mémoire celui qui le degré le plus faible.

La fonction renvoie donc le plus petit des degrés des voisins du sommet.

Par exemple, partant de C1, les voisins sont A2,B3,D3, E1 de degrés respectifs 3,6,6,2. L'algorithme choisira donc E1 et renverra la valeur 2.

ii. L'algorithme est glouton car à chaque étape de la boucle, on fait un choix optimum local, pour obtenir au final un résultat optimum global.

d)



La chaîne ci-dessus est hamiltonienne, puisqu'elle passe par tous les sommets de G , une et une seule fois.

e) L'échiquier comporte 25 sommets. Tout cycle hamiltonien comporte 25 arêtes, puisqu'il passe par tous les sommets, une et une seule fois et doit revenir à son point de départ.

Ainsi, partant par exemple d'une case noire, le cavalier doit après 25 déplacements revenir sur cette même case noire.

Or, à chaque déplacement, un cavalier alterne les couleurs : un coup sur une case blanche, un coup sur une case noire. Après un nombre impair de déplacements (25 en l'occurrence), la couleur de la case de départ est nécessairement différente de la couleur d'arrivée. D'où une contradiction.

Donc G ne possède aucun cycle hamiltonien.

Remarque

G ne possède aucun cycle hamiltonien, dès lors que n est impair, l'échiquier comportant alors un nombre impair de cases.

13) Programme

```
def arete():
    S=[[i,j]for i in range(1,9)for j in range(1,9)]
    s=0
    for sommet in S:
        s=s+mystere(sommet,S)
    return s/2
```

Grâce à la boucle, on calcule la somme des degrés de tous les sommets de l'échiquier, c'est-à-dire le double du nombre d'arêtes de G , en vertu du lemme des poignées de mains. D'où la division par deux à la fin...

Il y a 168 arêtes.

Remarque

Pour l'anecdote, sur un échiquier standard 8X8, il existe plein de chaînes hamiltoniennes et de cycles hamiltoniens. Vous pouvez chercher...

Pas évident d'en trouver, n'en serait-ce qu'une!

Exercice (eml 2016)

Partie I

$$\begin{aligned} 1) \forall t \in \mathbf{R}, f(-t) &= \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \\ &= \frac{e^{-2t}e^t}{e^{-2t}(1+e^t)^2} \\ &= \frac{e^{-t}}{e^{-2t}(1+2e^t+e^{2t})} \\ &= \frac{e^{-t}}{e^{-2t}+2e^{-t}+1} \\ &= \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Donc f est paire.

2) • f est définie sur \mathbf{R} et continue sur \mathbf{R} comme somme, composée et quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

• $\forall t \in \mathbf{R}, e^{-t} > 0$ et $(1+e^{-t})^2 > 0$ donc $f(t) > 0$.

• Pour tout réel $A > 0$, on a :

$$\int_0^A f(t)dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}} \right]_0^A = \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A} = 0 \text{ donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

f est paire et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$$\text{De plus, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité.

3) La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^x f(t)dt \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{1+e^{-t}} \right]_B^x \\ &= \lim_{B \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-B}} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{B \rightarrow -\infty} e^{-B} = +\infty \text{ donc } \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-B}} = 0.$$

$$\text{On conclut que } \forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

$$4)\text{a)} \forall t \in \mathbf{R}, t^3 f(t) = \frac{t^3}{e^t} \times \frac{1}{(1 + e^{-t})^2}.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + e^{-t})^2 = 1. \text{ Par inverse, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + e^{-t})^2} = 1.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

$$\text{Par produit, } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 f(t) = 0, \text{ ce qui prouve que } tf(t) \underset{+\infty}{=} 0 \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} tf(t) dt$ converge.

Enfin, $\int_0^1 tf(t) dt$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre.

Par Chasles, $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge.

b) Notons $g : t \mapsto tf(t)$.

$\forall t \in \mathbf{R}, g(-t) = (-t) \times f(-t) = -tf(t) = -g(t)$ donc g est impaire.

X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)| dt$ converge.

Or, $\int_0^{+\infty} |tf(t)| dt = \int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge d'après 4)a).

De plus, la fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est paire.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)| dt$ converge.

X admet donc une espérance donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = 0 \text{ par imparité de } t \mapsto tf(t).$$

Partie II

5) ϕ est strictement croissante sur \mathbf{R} (par composée de fonctions strictement croissante) et continue sur \mathbf{R} . Elle réalise donc une bijection de \mathbf{R} sur $I = \varphi(\mathbf{R})$ avec $I =]\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)[$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1$, puis $\lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0$.

Par composée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = +\infty$, puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$.

Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Ainsi, $I =]0, +\infty[$.

6) $\forall y > 0, y = \varphi(x) \iff y = \ln(1 + e^x)$

$$\iff e^y = 1 + e^x$$

$$\iff e^x = e^y - 1$$

$$\iff x = \ln(e^y - 1).$$

Comme $y > 0$, alors $e^y - 1 > 0$ ce qui définit bien $\ln(e^y - 1)$.

Les équivalences prouvent que $\forall y > 0, \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)$.

7) φ prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$ donc Y aussi.

Par conséquent, $P(Y \leq 0) = 0$.

8) La fonction de répartition G de Y est donnée par : $\forall x \in \mathbf{R}, G(x) = P(Y \leq x)$.

Distinguons deux cas :

• premier cas : $x \leq 0$.

On a alors $(Y \leq x) \subset (Y \leq 0)$ donc $P(Y \leq x) \leq P(Y \leq 0) = 0$, ce qui entraîne que $P(Y \leq x) = 0$. Donc $G(x) = 0$.

• deuxième cas : $x > 0$

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\varphi(X) \leq x) \\ &= P(X \leq \varphi^{-1}(x)) \quad \text{par croissance de } \varphi^{-1} \\ &= F(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\varphi^{-1}(x)}} \quad \text{d'après 3)} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^x - 1)}} \quad \text{d'après 6)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x - 1}} \quad \text{car } \forall a > 0, e^{-\ln a} = \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{1}{a} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^x} \\ &= 1 - e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

9) On voit que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Le cours donne : $E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 1$ et $V(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$.

Partie III

10)a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons F_n la fonction de répartition de T_n .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, F_n(x) &= P(T_n \leq x) = P((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)) \\ &= P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &= F(x) \times \dots \times F(x) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ ont même loi que } X \\ &= F(x)^n \\ &= \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right)^n. \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P(U_n \leq x) &= P(T_n - \ln n \leq x) \\ &= P(T_n \leq x + \ln n) \\ &= F_n(x + \ln n) \\ &= \left(\frac{1}{1 + e^{-(x + \ln n)}} \right)^n \\ &= \left(1 + e^{-(x + \ln n)} \right)^{-n} \\ &= \left(1 + e^{-x} e^{-\ln n} \right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right)^{-n}. \end{aligned}$$

11)a) F_U est de classe C^1 sur \mathbf{R} par composée de fonctions de classe C^1 .

Elle est donc continue sur \mathbf{R} et de classe C^1 sur \mathbf{R} (s'il manquait quelques points, ça irait quand même).

Donc U est une variable aléatoire à densité.

Une densité f_U de U est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, f_U(x) &= F_U'(x) \\ &= e^{-x} e^{-e^{-x}} \\ &= e^{-x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

✓ On dit que U suit la loi de Gumbel.

b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Cherchons $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq x)$.

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, P(U_n \leq x) = e^{-n \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right)}.$$

$$\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0 \text{ donc } \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}.$$

$$\text{Par produit, } -n \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-x}.$$

$$\text{ce qui signifie que } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n \ln \left(1 + \frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x}.$$

En composant avec l'exponentielle, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq x) = e^{-e^{-x}} = F_U(x).$$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers U .