Correction DS1

Exercice 1 :

I. a) $M(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = aA + bB$

Donc F est l'ensemble des combinaisons linéaires de A et B.
Ainsi F = Vect(A , B) ce qui prouve que (A,B) est une famille génératrice de F.

b) La famille (A,B) est libre puisque A et B ne sont visiblement pas proportionnelles.
(A,B) étant une famille libre et génératrice de F, c'est donc une base de F.
On a alors dim F = 2.

II. a) On trouve $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

On a donc AA = I ce qui prouve en revenant à la définition d'une matrice inversible que A est inversible et que $A^{-1} = A$.

b) $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

B n'est pas inversible car elle est triangulaire avec un zéro sur sa diagonale.

c) A vérifier …

d) Soit E(k) l'énoncé : $BA^k = A^k B = B$

E(0) s'écrit : $BA^0 = A^0B = B$ ce qui est vrai car $A^0 = I$
Soit $k \geq 0$ un entier quelconque. Supposons E(k) vrai.
$BA^{k+1} = B(A^kA) = (BA^k)A \underset{HR}{=} (B)A \underset{II.c)}{=} B$

De même $A^{k+1} B = B$
On a donc $BA^{k+1} = A^{k+1}B = B$ donc E(k+1) est vrai.
En conclusion pour tout $k \geq 0$: $BA^k = A^k B = B$.

III. $[M(a,b)]^n = (aA + bB)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aA)^{n-k} (bB)^k \quad (*)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k A^{n-k} B^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n A^n B^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b A^{n-1} B^1$$ et c'est tout car si $k \geq 2$: $B^k = O$

$= a^n A^n I + na^{n-1}bA^{n-1} B$

$= a^n A^n + na^{n-1}bB$ grâce à II.d)

(*) La formule du binôme peut s'appliquer car A et B donc aA et bB commutent grâce à la question II.c)

IV. a) On utilise la méthode de Gauss.

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$

$$G = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

G est inversible <=> $a \neq 0$ donc M(a,b) est inversible <=> $a \neq 0$

Supposons par la suite $a \neq 0$ et calculons $[M(a,b)]^{-1}$

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow aL_1 - bL_3 \\ L_2 \leftarrow aL_2 - bL_3 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1/a & -b/a^2 \\ 1/a & 0 & -b/a^2 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L_1 \leftarrow 1/a^2 L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/a^2 L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/a\, L_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } [M(a,b)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & -b/a^2 \\ 1/a & 0 & -b/a^2 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix}$$

b) On constate que $[M(a,b)]^{-1} = (1/a) A - (b/a^2) B$
Et comme $A = A^{-1}$ on vérifie que l'égalité III est encore valable pour $n = -1$.

Exercice 2 (EML 2004 remanié)

Partie A :

1)$E_1(A)$ est non-vide car O appartient à $E_1(A)$
Soient M et M' deux matrices de $E_1(A)$. Soient c et c' deux réels quelconques.
$A(cM+c'M') = AcM + Ac'M' = c(AM) + c'(AM') = cM + c'M'$
Donc $cM+c'M'$ appartient à $E_1(A)$.
Donc $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

$E_2(A)$ est non-vide car O appartient à $E_2(A)$
Soient M et M' deux matrices de $E_2(A)$. Soient c et c' deux réels quelconques.
$A^2(cM+c'M') = A^2cM + A^2c'M' = c(A^2M) + c'(A^2M') = c(AM) + c'(AM') = A(cM+c'M')$
Donc $cM+c'M'$ appartient à $E_2(A)$.
Donc $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

2)a)Soit M une matrice quelconque de $E_1(A)$. Alors, on a $AM = M$ d'où en multipliant par A membre à membre : $A^2M = AM$ donc M appartient à $E_2(A)$.
Donc $E_1(A) \subseteq E_2(A)$

2)b)Réciproquement, soit M une matrice quelconque de $E_2(A)$.
Alors $A^2M = AM$ d'où en multipliant par A^{-1} membre à membre : $A^{-1} A^2M = A^{-1} AM$
soit $AM = M$ donc M appartient à $E_1(A)$. Donc $E_2(A) \subseteq E_1(A)$.
Ayant montré la double-inclusion, on peut donc conclure que $E_1(A) = E_2(A)$.

2)c)On a
$$
\begin{aligned}
M \in E_1(A) &\iff AM = M \\
&\iff AM - M = O \\
&\iff (A-I)M = O \\
&\iff (A-I)^{-1}(A-I)M = (A-I)^{-1}O \\
&\iff M = O
\end{aligned}
$$
Donc $E_1(A) = \{O\}$

3)On prend $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

A est triangulaire sans 0 sur sa diagonale donc inversible donc d'après 2)b) : $E_1(A) = E_2(A)$.

De plus $A-I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible également donc $E_1(A) = \{O\}$

On a donc finalement $E_1(A) = E_2(A) = \{O\}$

4)On prend $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a)Ici A et A-I ne sont pas inversibles car triangulaires avec un 0 sur la diagonale.
Les questions 2)b) et 2)c) ne sont donc d'aucune utilité ici.

$M \in E_1(A) \iff AM = M$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$\iff$ d=e=f=g=h=i=0

$$\text{Donc } E_1(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \text{Vect}(U_1, U_2, U_3) \text{ avec } U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)(U_1, U_2, U_3) est donc une famille génératrice de $E_1(A)$.
Enfin $aU_1+bU_2+cU_3 = O$

$$\iff a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\iff a = b = c = 0$

Donc (U_1, U_2, U_3) est une famille libre.

(U_1, U_2, U_3) est donc une base de $E_1(A)$ et $\dim E_1(A) = 3$,

Partie B :

1)Soit M une matrice quelconque de $E_j(A)$.
Alors $A^j M = A^{j-1} M$ d'où en multipliant par A membre à membre : $A A^j M = AA^{j-1} M$
soit $A^{j+1} M = A^j M$ donc M appartient à $E_{j+1}(A)$. Donc $E_j(A) \subseteq E_{j+1}(A)$.

2)Supposons que pour tout entier $k \geq 1$ on ait $E_k(A) \neq E_{k+1}(A)$.
Du fait de la question précédente, on a alors $E_k(A)$ strictement inclus dans $E_{k+1}(A)$, ce qui entraîne que $\dim E_k(A) < \dim E_{k+1}(A)$ pour tout entier $k \geq 1$.
On a par ailleurs : $E_k(A) \subseteq M_3(\mathbb{R})$ donc $\dim E_k(A) \leq \dim M_3(\mathbb{R}) = 9$.
Posons $U_k = \dim E_k(A)$.
La suite (U_k) est une suite strictement croissante d'entiers et vérifie $U_k \leq 9$ pour tout entier $k \geq 1$, ce qui est absurde.

Donc il existe un entier $k \geq 1$ tel que $E_k(A) = E_{k+1}(A)$.

3)Soit P(j) la proposition : $E_j(A) = E_{j+1}(A)$ (avec $j \geq k$).

P(k) est vraie grâce à la question B2).

Soit $j \geq k$ un entier. Supposons P(j) vraie, on a alors $E_j(A) = E_{j+1}(A)$ **(HR)**
Montrons que P(j+1) est vraie, c'est-à-dire que $E_{j+1}(A) = E_{j+2}(A)$.
On a déjà $E_{j+1}(A) \subseteq E_{j+2}(A)$ grâce à B1).
Réciproquement, soit $M \in E_{j+2}(A)$.
On a alors $A^{j+2} M = A^{j+1} M$ soit $A^{j+1} (AM) = A^j (AM)$ ce qui prouve que $AM \in E_{j+1}(A)$.
Or, par (HR), on a $E_j(A) = E_{j+1}(A)$ donc $AM \in E_j(A)$, ce qui se traduit par :
$A^j (AM) = A^{j-1} (AM)$, soit $A^{j+1} M = A^j M$ donc $M \in E_{j+1}(A)$.
On vient de prouver que $E_{j+2}(A) \subseteq E_{j+1}(A)$.
De la double-inclusion établie, on déduit que $E_{j+1}(A) = E_{j+2}(A)$, ce qui montre que P(j+1) est vraie.

On conclut que P(j) est vraie pour tout entier $j \geq k$.

Exercice 3 :
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants
$\vec{v_1} = (2,3,-1)$ $\vec{v_2} = (1,-1,-2)$ $\vec{v_3} = (0,0,1)$ $\vec{w_1} = (3,7,0)$ $\vec{w_2} = (5,0,-7)$

On pose F = Vect($\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$) et G = Vect($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$)

1)Les vecteurs $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ forment par construction une famille génératrice de F. De plus, ils sont libres car non proportionnels. Donc ($\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$) est une base de F et dim F = 2
Un même argument s'applique pour G …

2)On cherche des réels a et b tels que $\vec{w_1} = a\ \vec{v_1} + b\ \vec{v_2}$.
<=> (3,7,0) = a(2,3,-1) + b(1,-1,-2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a - b = 7 \\ -a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b = 3 \\ -7a = 7 \\ a = -2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Donc $\vec{w_1} = 2\ \vec{v_1} - \vec{v_2}$

On cherche de même des réels c et d tels que $\vec{w_2} = c\ \vec{v_1} + d\ \vec{v_2}$.
<=> (5,0,-7) = c(2,3,-1) + d(1,-1,-2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + d = 5 \\ 3c - d = 0 \\ -c - 2d = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5c = 5 \\ d = 3c \\ -7c = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Donc $\vec{w_2} = \vec{v_1} + 3\ \vec{v_2}$

3)Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de F. Alors, il existe des réels a et b tels que
$\vec{u} = a\,\vec{w_1} + b\,\vec{w_2} = a(2\,\vec{v_1} - \vec{v_2}) + b(\vec{v_1} + 3\,\vec{v_2}) = (2a+b)\,\vec{v_1} + (-a+3b)\,\vec{v_2}$
donc $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ donc $\vec{u}$ appartient à G.
On a donc montré que F $\subseteq$ G.

Comme F $\subseteq$ G et dim F = dim G, on déduit que F = G.

4)a $\vec{v_1}$ +b $\vec{v_2}$ +c $\vec{v_3}$ = $\vec{O}$

<=> a(2,3,-1)+b(1,-1,-2)+c(0,0,1) = (0,0,0)

$$\iff \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a - b = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

<=> a = b = c = 0

Donc ($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$) est une famille libre.
Comme c'est une famille libre de 3 vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

5)a)La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ = ($\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$) à la base $\mathcal{C}$ est :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

b)On vérifie par la méthode de Gauss que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & -2/5 & 0 \\ 7/5 & -3/5 & 1 \end{bmatrix}$.

c)La formule de changement de base donne :
$$W=PW', \text{ soit } W' = P^{-1} W = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & -2/5 & 0 \\ 7/5 & -3/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Donc les coordonnées de $\vec{w_1}$ dans la base ($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$) sont (2,-1,0).

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln x = +\infty$.
D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2)La fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de deux fonctions continues.
La fonction $x \mapsto 1$ également car c'est une fonction constante.
Par différence, f est continue sur $]0, +\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
Or, $f(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.
Ainsi, f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

3)La fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables.
La fonction $x \mapsto 1$ également car c'est une fonction constante.
Par différence, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, f'(x) = -\left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = -x(2\ln x + 1).$$

4)Pour tout $x > 0$, on a :
$\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{(1 - x^2 \ln x) - 1}{x} = -x \ln x.$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Donc f est dérivable (à droite) en 0 et $f'(0) = 0$.

5) $\forall x > 0, f'(x) \geq 0 \iff 2\ln x + 1 \leq 0 \iff \ln x \leq -\dfrac{1}{2} \iff x \leq e^{-1/2}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

On notera que $f\left(e^{-1/2}\right) = 1 - \left(e^{-1/2}\right)^2 \ln\left(e^{-1/2}\right) = 1 - e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2e}$.

6)f est continue et strictement décroissante sur $\left[e^{-1/2},+\infty\right[$ donc réalise une bijection de $\left[e^{-1/2},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[e^{-1/2},+\infty\right[\right)=\left]-\infty,1+\frac{1}{2e}\right]$.
$0\in\left]-\infty,1+\frac{1}{2e}\right]$ admet donc un unique antécédent α par f.
Par ailleurs, f est positive sur $\left[0,e^{-1/2}\right[$ donc ne peut s'annuler sur cet intervalle.
Ainsi, il existe un unique $\alpha>0$ tel que $f(\alpha)=0$.

$f\left(\sqrt{2}\right)=1-\left(\sqrt{2}\right)^2\ln\left(\sqrt{2}\right)=1-2\ln\left(2^{1/2}\right)=1-2\times\frac{1}{2}\ln 2=1-\ln 2>0$,

$f(2)=1-2^2\ln 2=1-4\ln 2<0$,

$f(\alpha)=0$.

Donc $f(2)<f(\alpha)<f\left(\sqrt{2}\right)$.

f étant strictement décroissante sur $\left[\sqrt{2},2\right]$, on conclut que $\sqrt{2}\leq\alpha\leq 2$.