correction DM6 cubes

Partie A

1)Pour tout $x \geq 0$, on a :

$g(x) \geq 0 \iff \sqrt{x} \geq x \iff (\sqrt{x})^2 \geq x^2 \iff x \geq x^2 \iff x^2 - x \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 1.$

Donc g est positive sur $[0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$.

2)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$ ».

• $\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $1 \leq x_1 \leq x_0$ », c'est-à-dire « $1 \leq \sqrt{t} \leq t$ ».
Par énoncé, $t \geq 1$ donc $\sqrt{t} \geq 1$. Puis $\sqrt{t} - t = g(t) \leq 0$ d'après la question 1) donc $\sqrt{t} \leq t$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $1 \leq x_{n+1} \leq x_n$ donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{x_{n+1}} \leq \sqrt{x_n}$ (par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$) ou encore : $1 \leq x_{n+2} \leq x_{n+1}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

• On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$.

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante et minorée (par 1) donc convergente vers l.

Comme $\forall n \in \mathbf{N},\ x_n \geq 1$, on a par passage à la limite : $l \geq 1$.

$(x_n)_{n\geq 0}$ est définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

f est continue sur $\mathbf{R}_+$ donc en l.

D'après le théorème du point fixe, l est un point fixe de f.

Or, $f(x) = x \iff \sqrt{x} = x \iff x = x^2 \iff x = 0$ ou $x = 1$.

Donc $l = 1$, la valeur $l = 0$ ne convenant pas car $l \geq 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

3)On montre de même que $\forall n \in \mathbf{N},\ x_n \leq x_{n+1} \leq 1$.

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc croissante et majorée (par 1) donc convergente.

Le théorème du point fixe donne de même : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

4)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n(x_n - 1) \\
&= 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) - 2^n\left(x_{n+1}^2 - 1\right) \\
&= 2^n(x_{n+1} - 1)\big(2 - (x_{n+1} - 1)\big) \\
&= -2^n(x_{n+1} - 1)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

5)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
V_{n+1} - V_n &= 2^{n+1}\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) - 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \\
&= 2^{n+1}\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) - 2^n\left(1 - \left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)^2\right) \\
&= 2^n\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right)\left(2 - \left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)\right) \\
&= 2^n\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

6)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
U_n - V_n &= 2^n(x_n - 1) - 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \\
&= 2^n\left(x_n - 2 + \frac{1}{x_n}\right) \\
&= 2^n \times \frac{x_n^2 - 2x_n + 1}{x_n} \\
&= 2^n \times \frac{(x_n - 1)^2}{x_n} \geq 0.
\end{aligned}$$

7)$(V_n)_{n\geq 0}$ est croissante donc $\forall n \in \mathbf{N},\ V_0 \leq V_n$,

$(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante donc $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \leq U_0$,

De plus, $\forall n \in \mathbf{N},\ V_n \leq U_n$.

On déduit que $\forall n \in \mathbf{N},\ V_0 \leq V_n \leq U_n \leq U_0$.

$(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée (par V_0) donc convergente vers L.

$(V_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée (par U_0) donc convergente vers L'.

Enfin, la relation $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = V_n x_n$ donne par passage à la limite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (V_n x_n)$, c'est-à-dire : $L = L' \times 1$, d'où $L = L'$.

$(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ sont donc convergentes et ont même limite L.

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - 1 - \frac{L}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2^n(x_n - 1) - L\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - L) = 0.$

Donc $x_n - 1 - \frac{L}{2^n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$, c'est-à-dire : $x_n \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{L}{2^n} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Partie B

9)Si $t = 1$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est constante et égale à 1. Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = 0$.
On a donc $L = 0$. Ainsi, $L(1) = 0$.

10)$(V_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ croît et converge vers $L(t)$ donc $\forall n \in \mathbf{N},\ V_n(t) \leq L(t)$.

$(U_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ décroît et converge vers $L(t)$ donc $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n(t) \geq L(t)$.

En recollant les inégalités, on a : $\forall t > 0, \forall n \in \mathbf{N},\ V_n(t) \leq L(t) \leq U_n(t)$.

De plus, $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n(t) \leq U_0(t) = x_0(t) - 1 = t - 1$.

Et $V_n(t) \geq V_0(t) = 1 - \dfrac{1}{x_0(t)} = 1 - \dfrac{1}{t}$.

On conclut que $\forall t > 0,\ 1 - \dfrac{1}{t} \leq L(t) \leq t - 1$.

11)De la question précédente, on déduit pour tout $t > 0$:

$\dfrac{1 - \frac{1}{t}}{t-1} \leq \dfrac{L(t)}{t-1} \leq 1$, c'est-à-dire : $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{L(t)}{t-1} \leq 1$.

Comme $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{1}{t} = 1$, la propriété des gendarmes donne alors : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{L(t)}{t-1} = 1$.

Donc L est dérivable en 1 et $L'(1) = 1$.

12)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\forall t > 0, \forall s > 0,\ x_n(st) = x_n(s)x_n(t)$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $\forall t > 0, \forall s > 0,\ x_0(st) = x_0(s)x_0(t)$ ».
Pour tous $s > 0$ et $t > 0$, on a par construction : $x_0(st) = st$, $x_0(s) = s$ et $x_0(t) = t$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Pour tous $s > 0$ et $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1}(st) &= \sqrt{x_n(st)} \\ &= \sqrt{x_n(s)x_n(t)} \text{ par hyp. de récurrence} \\ &= \sqrt{x_n(s)}\sqrt{x_n(t)} \\ &= x_{n+1}(s)x_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall t > 0, \forall s > 0, \forall n \in \mathbf{N}\ x_n(st) = x_n(s)x_n(t)$.

13)Pour tous $s > 0$ et $t > 0$, on a :

$U_n(st) - U_n(s) - U_n(t)$

$= 2^n\,(x_n(st) - 1) - 2^n\,(x_n(s) - 1) - 2^n\,(x_n(t) - 1)$

$= 2^n\big(x_n(st) - x_n(s) - x_n(t) + 1\big)$

$= 2^n\big(x_n(s)x_n(t) - x_n(s) - x_n(t) + 1\big)$

$= 2^n\big(x_n(s) - 1\big)\big(x_n(t) - 1\big)$ il fallait y penser !

$= U_n(s)\,(x_n(t) - 1)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(s) = L(s)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(t) - 1 = 0$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(s)\,(x_n(t) - 1) = 0$.

Ainsi, $\forall t > 0, \forall s > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \big(U_n(st) - U_n(s) - U_n(t)\big) = 0$.

14)L'égalité ci-dessus s'écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(st) - \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(s) - \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(t) = 0$,

c'est-à-dire : $L(st) - L(s) - L(t) = 0$.

Donc $L(st) = L(s) + L(t)$.

15)Soit $s > 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to s} \frac{L(x)-L(s)}{x-s} &= \lim_{t\to 1} \frac{L(st)-L(s)}{st-s} \text{ en posant } x = st\\ &= \lim_{t\to 1} \frac{L(t)}{s(t-1)}, \text{ grâce à la question 14}\\ &= \frac{1}{s}, \text{ grâce à la question 11.}\end{aligned}$$

16)La question 15) prouve que L est dérivable en tout $s > 0$ et que $L'(s) = \dfrac{1}{s}$.

Ainsi, L est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall t > 0,\ L'(t) = \dfrac{1}{t}$.

17)En primitivant, il existe donc une constante réelle C telle que
$\forall t > 0,\ L(t) = \ln t + C$.

Comme $L(1) = 0$, cela entraîne $C = 0$.

Ainsi, $\forall t > 0,\ L(t) = \ln t$.