Correction DM7 cubes

Exercice 1 :

1)On effectue une intégration par parties dans l'intégrale de gauche en posant :

$u'(x) = x^n \qquad v(x) = \dfrac{1}{(2+x)^{n+1}}$

$u(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \qquad v'(x) = \dfrac{-(n+1)}{(2+x)^{n+2}}.$

u et v sont de classe C^1 sur $[-1,0]$. L'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{(2+x)^{n+1}}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{-(n+1)}{(2+x)^{n+2}}\mathrm{d}x \\ &= 0 - \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1^{n+1}}\right) + \int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{(2+x)^{n+2}}\mathrm{d}x \qquad . \\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{(2+x)^{n+2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $S_n = \ln 2 - \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $S_0 = \ln 2 - \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x = [\ln(2+x)]_{-1}^{0} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ et $S_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= S_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \\ &= \ln 2 - \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \text{ par hyp. de récurrence} \\ &= \ln 2 - \int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{(2+x)^{n+2}}\mathrm{d}x, \text{ grâce à la question 1).}\end{aligned}$$

D'après l'axiome de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3)Les bornes de l'intégrale étant rangées dans l'ordre croissant, l'inégalité triangulaire s'applique et donne :

$$\left|\int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-1}^{0} \left|\frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\right| \mathrm{d}x.$$

Or, $$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \left|\frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\right| \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \frac{|x^n|}{|(2+x)^{n+1}|}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{|x|^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x \text{ car } (2+x)^{n+1} > 0.\end{aligned}$$

On a donc $\left|\int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-1}^{0} \frac{|x|^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x \quad (*)$

$\forall x \in [-1, 0]$, $2 + x \geq 1$ donc $(2+x)^{n+1} \geq 1$ et $\frac{1}{(2+x)^{n+1}} \leq 1$.

Donc $\forall x \in [-1, 0]$, $\frac{|x|^n}{(2+x)^{n+1}} \leq |x|^n$.

En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes -1 et 0, on a :

$\int_{-1}^{0} \frac{|x|^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^{0} |x|^n \mathrm{d}x \quad (**)$

En recollant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on a :
$\left|\int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-1}^{0} |x|^n \mathrm{d}x$.

Enfin, $\int_{-1}^{0} |x|^n \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x)^n \mathrm{d}x = \left[-\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{n+1}$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|\int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

4)On a donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $-\frac{1}{n+1} \leq \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{(2+x)^{n+1}}\mathrm{d}x = 0$ (propriété des gendarmes).

La question 2) donne alors : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$.

Cette limite est finie donc la série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

5)$\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

La série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Donc la série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 2 (hec 2007)

1)a)• Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$.

Les opérations de Gauss donnent :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ L_3 \longleftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \longleftarrow (1-\lambda)L_2 - L_3 \end{array}$$

λ est valeur propre de $A \iff A - \lambda I$ n'est pas inversible $\iff 1 - \lambda = 0$ ou $\lambda^2 - \lambda = 0$ $\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

Donc $sp(A) = \{0, 1\}$.

• Cherchons maintenant les sous-espaces propres de A.

$E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$.

En posant $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$AU = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(A)$.

$E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$.

En posant $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$(A - I)U = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} y & + & z & = & 0 \\ y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$.

b)$E_0(A)$ et $E_1(A)$ sont de dimension 1.
La somme des dimensions des sous-espcaes propres de A vaut donc 2, alors que $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, A n'est pas diagonalisable.
Donc f n'est pas diagonalisable.

0 est valeur propre de A donc de f. Donc f n'est pas bijectif.

2)Tous les coefficients de A sont nuls sauf ceux de la première ligne et ceux de la $n+1$-ème colonne qui valent 1.

Pour $n=2$, on a par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3)• $$\begin{aligned} rg(f) &= dim Imf \\ &= dim\mathrm{Vect}\left(f(e_1),...,f(e_n),f(e_{n+1}),f(e_{n+2}),...,f(e_{2n+1})\right) \\ &= dim\mathrm{Vect}\left(e_1,...,e_1,e_1+...+e_{2n+1},e_1,...,e_1\right) \\ &= dim\mathrm{Vect}\left(e_1,e_1+...+e_{2n+1}.\right) \end{aligned}$$

$\left(e_1,e_1+...+e_{2n+1}\right)$ est une famille génératrice du Vect et elle est libre car les vecteurs e_1 et $e_1+...+e_{2n+1}$ ne sont pas colinéaires (on peur le voir aisément en écrivant leur vecteur colonne dans la base canonique).
Donc c'est une base du Vect qui est alors de dimension 2.

Ainsi, $rg(f)=2$.

• Le théorème du rang donne :

$dimKerf = dim\mathbf{R}^{2n+1} - rg(f) = (2n+1)-2 = 2n-1$.

4)• $dimKerf = 2n-1 \geq 1$ car $n \geq 1$. Donc $E_0(f) = Kerf \neq \{0\}$.
Ainsi, 0 est valeur propre de f et son sous-espace propre associé $E_0(f)$ est de dimension $2n-1$.

• Notons $I = [\![2,n]\!] \cup [\![n+2,2n+1]\!]$.

Pour trouver une base de $E_0(f) = Kerf$, on peut remarquer que

$\forall i \in I,\ f(e_i - e_1) = f(e_i) - f(e_1) = 0$ donc $e_i - e_1 \in E_0(f) = Kerf$.

De plus, pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in \mathrm{i}}$ de réels, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} \alpha_i(e_i - e_1) = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{i\in I}(\alpha_i e_i - \alpha_i e_1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow -\left(\sum_{i\in I}\alpha_i\right)e_1 + \sum_{i\in I}\alpha_i e_i = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

La famille $(e_1,...,e_n,e_{n+2},...,e_{2n+1})$ est libre car c'est une sous-famille de la famille libre $(e_1,...,e_n,e_{n+1},e_{n+2},...,e_{2n+1})$.

$(*)$ donne alors : $-\left(\sum_{i\in I}\alpha_i\right) = 0$ et $\forall i \in I,\ \alpha_i = 0$.

On a montré l'implication $\sum_{i\in I}\alpha_i(e_i - e_1) = 0 \Longrightarrow \forall i \in I,\ \alpha_i = 0$.

Donc la famille $(e_i - e_1)_{i\in I}$ est libre.

C'est une famille libre formée de $2n-1$ vecteurs de $E_0(f) = Kerf$, lui-même de dimension $2n-1$. C'est donc une base de $E_0(f) = Kerf$.

5)a)$\forall u \in Imf,\ \tilde{f}(u) = f(u) \in Imf$ donc $\tilde{f}$ est « endo ».

Comme $\tilde{f}$ est la restriction de f à Imf, $\tilde{f}$ hérite des propriétés de linéarité de f. Donc $\tilde{f}$ est linéaire.

Ainsi, $\tilde{f}$ est un endomorphisme de Imf.

b)On a déjà : $e_1 = f(e_1) \in Imf$ et $e_1 + ... + e_{2n+1} = f(e_{n+1}) \in Imf$.

En reprenant les calculs de la question 3), on voit que $Imf = \text{Vect}\left(e_1, e_1 + ... + e_{2n+1}\right)$, ce qui prouve que $(e_1, e_1 + ... + e_{2n+1})$ est une famille génératrice de Imf.

Elle est de cardinal 2 et $dimImf = 2$.

Donc $(e_1, e_1 + ... + e_{2n+1})$ est une base de Imf.

c)$\tilde{f}(e_1) = f(e_1) = e_1$,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(e_1 + ... + e_{2n+1}) &= f(e_1 + ... + e_{2n+1}) \\
&= f(e_1) + ... + f(e_{2n+1}) \\
&= f(e_1) + ... + f(e_n) + f(e_{n+1}) + f(e_{n+2}) + ... + f(e_{2n+1}) \\
&= e_1 + ... + e_1 + f(e_{n+1}) + e_1 + ... + e_1 \\
&= ne_1 + (e_1 + ... + e_{2n+1}) + ne_1 \\
&= 2ne_1 + 1(e_1 + ... + e_{2n+1}).
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de f et u un vecteur propre de f associé à λ.

On a alors : $f(u) = \lambda u$, puis $u = \frac{1}{\lambda} f(u)$ et $u = f\left(\frac{1}{\lambda} u\right)$. Donc[1] $u \in Imf$.

e)On sait déjà que 0 est valeur propre de f et que 1 est valeur propre de f puisque $f(e_1) = e_1$.

Montrons que 0 et 1 sont les seules valeurs propres de f.

Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de f et soit u un vecteur propre de f associé à λ. D'après la question 5)d), $u \in Imf$ donc $\tilde{f}(u)$ existe.

De plus, $\tilde{f}(u) = f(u) = \lambda u$ et $u \neq 0$ prouvent que λ est une valeur propre de $\tilde{f}$.

Or, l'unique valeur propre de $\tilde{f}$ est 1 car l'unique valeur propre de $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\tilde{f})$ est 1 (matrice triangulaire de diagonale constituée de 1).

Donc $\lambda = 1$.

On conclut que $sp(f) = \{0, 1\}$.

f)On sait déjà que $dimE_0(f) = 2n - 1$.

Il reste à calculer $dimE_1(f)$.

La question 5)d) donne : $E_1(f) \subset Imf$.

Supposons que $E_1(f) = Imf$. On a alors $\forall u \in Imf,\ f(u) = u$ donc $\tilde{f}(u) = u$.

Cela signifie que $\tilde{f} = \text{Id}_{Imf}$ et entraîne que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en contradiction avec la question 5)c).

1. On vient de prouver que $\forall \lambda \neq 0,\ E_\lambda(f) \subset Imf$, résultat surprenant, vrai pour tout endomorphisme f.

Donc $E_1(f) \subsetneq Imf$.
Comme $dimImf = 2$, on a alors $dimE_1(f) < 2$ donc $dimE_1(f) = 1$.
Finalement, $dimE_0(f) + dimE_1(f) = (2n-1)+1 = 2n$ et $dim\mathbf{R}^{2n+1} = 2n+1$.
D'après le théorème de réduction, f n'est pas diagonalisable.