Chapitre 10 : fonctions de deux variables

Dans tout le chapitre, on identifie $\mathbf{R}^2 = \{(x,y), x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ avec l'ensemble des points du plan.

I)Topologie de $\mathbf{R}^2$

Déf : soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbf{R}^2$.
On appelle distance de A à B, le nombre réel noté $d(A,B)$, défini par :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Déf : soit A un point de $\mathbf{R}^2$ et soit $r > 0$ un réel.
On appelle disque ouvert de centre A et de rayon r, la partie de $\mathbf{R}^2$, notée $D_o(A,r)$, définie par :

$$D_0(A,r) = \left\{M \in \mathbf{R}^2 \mid d(A,M) < r\right\}.$$

On appelle disque fermé de centre A et de rayon r, la partie de $\mathbf{R}^2$, notée $D_f(A,r)$, définie par :

$$D_f(A,r) = \left\{M \in \mathbf{R}^2 \mid d(A,M) \leq r\right\}.$$

Exercice 1
Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x + 6y < 15\right\}$. Reconnaître et représenter E.

Déf : soit U une partie de $\mathbf{R}^2$.
On dit que U est ouverte si pour tout point A de U, il existe un disque de centre A strictement inclus dans U.
On dit que U est fermée si son complémentaire est ouverte.

Remarque
En pratique, une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$, c'est une partie du plan dont on enlève la frontière.

Exemples :
1)Tout disque ouvert est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.
Tout disque fermé est une partie fermée de $\mathbf{R}^2$.
2)Tout rectangle $]a,b[\times]c,d[$ est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.
Tout rectangle $[a,b] \times [c,d]$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^2$.

Déf : on dit qu'une partie U de $\mathbf{R}^2$ est bornée si elle est incluse dans un disque de centre O, c'est-à-dire s'il existe un réel $K > 0$ tel que $\forall M \in U,\ d(O,M) \leq K$.

Exemples :
1)Tout disque est une partie bornée de $\mathbf{R}^2$.
2)Tout rectangle est une partie bornée de $\mathbf{R}^2$.

II)Fonction de deux variables

Déf : on appelle fonction de deux variables toute application $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, où D est une partie de $\mathbf{R}^2$.

L'ensemble $\left\{(x,y,f(x,y)) \in \mathbf{R}^3,\ (x,y) \in D\right\}$ est une surface.

Déf : soit $f : D \to \mathbf{R}$ et soit $c \in \mathbf{R}$.
On appelle ligne de niveau c de f, la partie de $\mathbf{R}^2$, notée L_c, définie par :

$$L_c = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = x^2 y^2$.
Déterminer la ligne de niveau 1 de f.

III)Continuité d'une fonction de deux variables

Déf : soit $f : D \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ et soit $M_0 \in D$.
On dit que f est continue en M_0 si $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall M \in D$:
$d(M, M_0) \leq \alpha \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| \leq \epsilon$.

Déf : on dit que $f : D \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est polynômiale si c'est une combinaison linéaire de fonctions du type $(x, y) \to x^i y^j$ où $i \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{N}$.

Propriété 1
Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Propriété 2
La somme, la différence, la combinaison linéaire, le produit et le quotient (bien défini) de fonctions continues sur D est continue sur D.

Propriété 3
La composée d'une fonction continue de deux variables, suivie d'une fonction continue d'une variable est une fonction continue de deux variables.

Exercice 3
Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto (xy^2 + 5y)e^{x^2 - 3y^2 + 1}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 4
Soit $D = D_0(O, 1)$.
Montrer que la fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(1 - x^2 - y^2)$ est continue sur D.

IV)Dérivées partielles d'ordre un

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ admet une dérivée partielle d'ordre un par rapport à x si pour tout $y \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $x \to f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée étant notée $\partial_1 f(x, y)$.

$$\checkmark\ \partial_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ admet une dérivée partielle d'ordre un par rapport à y si pour tout $x \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $y \to f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée étant notée $\partial_2 f(x, y)$.

$$\checkmark\ \partial_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Déf : les fonctions $\partial_1 f : (x, y) \mapsto \partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f : (x, y) \mapsto \partial_2 f(x, y)$ sont appelées dérivées partielles d'ordre un de f.

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ si f admet des dérivées partielles d'ordre un et si chacune de ces dérivées partielles est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Propriété 4
Toute fonction polynomiale est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

Propriété 5
La somme, la différence, la combinaison linéaire, le produit et le quotient (bien défini) de fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

Propriété 6
La composée d'une fonction de classe C^1 de deux variables, suivie d'une fonction de classe C^1 d'une variable est une fonction de classe C^1 de deux variables.

Exercice 5
Soit $f : (x, y) \mapsto 2x^3 - 5x^3y^8 + 3xy - 5x + 2y + 7$.
Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

Exercice 6
Même question avec $f : (x, y) \mapsto (5x^3 + 3y^2)^4$.

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre un.
On appelle gradient de f en (x, y) la matrice de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, notée $\nabla f(x, y)$, définie par $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, y) \\ \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}$.

Exercice 7
Soit $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$. Calculer $\nabla f(0, 0)$.

V)Dérivées partielles d'ordre deux

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre un.
On dit que f admet des dérivées partielles d'ordre deux si les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ admettent des dérivées partielles d'ordre 1, notées :

$$\partial^2_{1,1} f = \partial_1(\partial_1 f)$$

$$\partial^2_{2,1} f = \partial_2(\partial_1 f)$$

$$\partial^2_{1,2} f = \partial_1(\partial_2 f)$$

$$\partial^2_{2,2} f = \partial_2(\partial_2 f)$$

Déf : on dit que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ si f admet des dérivées partielles d'ordre deux et si chacune de ces dérivées partielles est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Propriété 7
Les propriétés 4,5,6 restent vraies en remplaçant C^1 par C^2.

Exercice 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = 4x^3y^2 + 2x^2y^3 + 5x - 3y$.
Justifier que f est C^2 sur $\mathbf{R}^2$, puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Théorème 1 (Schwarz)
Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors on a $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \partial^2_{1,2} f(x, y) = \partial^2_{2,1} f(x, y)$.

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre deux.
On appelle matrice hessienne de f en (x, y) la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, notée $\nabla^2 f(x, y)$, définie par :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}.$$

✓ Si f est C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors $\nabla^2 f(x, y)$ est symétrique (Schwarz).

VI)Extrémum

Déf : soit U une partie de $\mathbf{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de U.
On dit que $f : U \to \mathbf{R}$ admet un maximum local (ou relatif) en (x_0, y_0) s'il existe un disque D inclus dans U centré en (x_0, y_0) tel que

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \leq f(x_0, y_0).$$

On dit que ce maximum est global (ou absolu) si

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \leq f(x_0, y_0).$$

Déf : soit U une partie de $\mathbf{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de U.
On dit que $f : U \to \mathbf{R}$ admet un minimum local (ou relatif) en (x_0, y_0) s'il existe un disque D inclus dans U centré en (x_0, y_0) tel que

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \geq f(x_0, y_0).$$

On dit que ce maximum est global (ou absolu) si

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) \leq f(x_0, y_0).$$

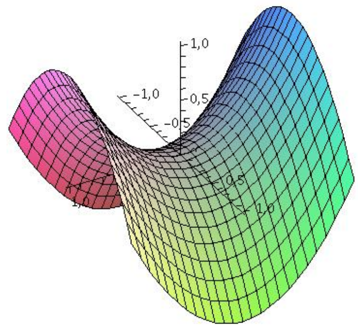
Propriété 8
Soit U une partie de $\mathbf{R}^2$ et soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction continue.
Si U est fermée et bornée, alors f admet un minimum global et un maximum global sur U.

Exercice 9
Justifier que la fonction f définie sur $U = [0,1] \times [0,1]$ par $f(x, y) = x^3y^2 + x + y$ admet un maximum global et un minimum global sur U.

Déf : soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre un en (x_0, y_0).
On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire si $\partial_1 f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_2 f(x_0, y_0) = 0$.

Théorème 2 (condition nécessaire d'extrémum)
Soit U une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$ et soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction C^1 sur U.
Si f admet un extrémum (local ou global) en un point (x_0, y_0) de U, alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

> Remarque
> La réciproque est fausse, il peut exister des points critiques (x_0, y_0) de f qui ne sont pas des extrémas de f. On les appelle ≪ points selle ≫.



Théorème 3 (condition suffisante d'extrémum local)
Soit U une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$ et soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction C^2 sur U.
Soit $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f.
– Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
– Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
– Si les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont non-nulles et de signes contraires, alors f n'admet pas d'extrémum local en (x_0, y_0). C'est un « point selle ».
– Si l'une des valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut pas conclure. C'est un « point dégénéré ».

Exercice 10
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y^4.$$

1)Montrer que f admet un unique extrémum local et préciser sa nature.

2)a)Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = (x + y)^2 + y^2 + 2y^4$.

b)Le point (0,0) est-il un extrémum global de f ?

Exercice 11
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + 2x^2 + x - y^2.$$

Etudier si f admet des extrémas locaux.