Chapitre 18 : Convergences

Les variables aléatoires considérées sont discrètes ou à densité.

I)Inégalité de Markov et ses corollaires

Théorème 1 (inégalité de Markov - redonnée au concours)
Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance.

$$\forall a > 0 : P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Théorème 2 (inégalité de Bienaymé-Tchébitchev)
Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Théorème 2bis (inégalité de Bienaymé-Tchébitchev)
Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

$$\forall \epsilon > 0,\ P(|X - E(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Exercice 1
Soit X une variable aléatoire admettant une variance.
On cherche à évaluer $p = P\big(E(X) - 2\sigma(X) < X < E(X) + 2\sigma(X)\big)$.
1)Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébitchev que $p \geq 0,75$.
2)Donner la valeur de p dans les cas suivants :
a)$X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$ b)$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ c)$X \hookrightarrow \mathscr{G}(3/4)$.

Théorème 3 (loi faible des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes, ayant la même espérance m et la même variance.
Pour tout $n \geq 1$, posons $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

$$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n \to +\infty} P(|\overline{X_n} - m| \geq \epsilon) = 0.$$

Exercice 2
On considère une expérience aléatoire constituée de n d'épreuves successives et indépendantes.
A chacune de ces épreuves est lié un événement A de probabilité p.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé à l'épreuve numéro } k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

A l'aide de la loi faible des grands nombres, démontrer le théorème de Bernoulli : « la fréquence de réalisation d'un événement lors d'un grand nombre d'épreuves successives et indépendantes est proche de sa probabilité théorique ».

II)Convergence en loi

Déf : pour tout $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de fonction de répartition F_n et soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si en tout point x où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x).$$

On note alors $X_n \stackrel{\mathscr{L}}{\to} X$.

✓ Si X est à densité, F est continue sur $\mathbf{R}$.
L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ devra être prouvée pour tout x réel.

<u>Exercice 3</u>
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires.
Pour tout $n \geq 1$, on suppose que la fonction de répartition de X_n vaut :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - exp\left(-x - \dfrac{x^2}{n}\right) & \text{si } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

1)X_n est-elle à densité ?

2)Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une var. al. X dont on donnera la loi.

Propriété 1 (valable uniquement pour des variables aléatoires discrètes)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes avec $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_n(\Omega) \subset \mathbf{Z}$.
Soit X une variable aléatoires discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbf{Z}$.

Alors, $X_n \stackrel{\mathscr{L}}{\to} X \iff \forall k \in \mathbf{Z},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

<u>Exercice 4</u>
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes de loi donnée par :

$X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X_n = 0) = \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{5}\right)^n$, $P(X_n = 1) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^n$ et $P(X_n = 2) = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X discrète dont on précisera la loi.

Théorème 4
Soit $\lambda > 0$ une constante réelle et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Alors, $X_n \stackrel{\mathscr{L}}{\to} X$ où $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

On a donc $\forall k \in \mathbf{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Propriété 2 (approximation de la loi binômiale par la loi de Poisson)
Si n est grand et p petit, on peut approcher la loi $\mathscr{B}(n, p)$ par la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$.

✓ Cette propriété s'applique en pratique pour $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$.

Exercice 5

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30, 0.1)$. Calculer une valeur approchée de $P(X = 5)$.

Théorème 5 (théorème de la limite centrée)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires (discrètes ou à densité) mutuellement **indépendantes** et de **même loi**.

Pour tout $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1)Alors, $S_n^* \xrightarrow{\mathscr{L}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ **T.L.C**

On a donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to+\infty} P(S_n^* \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

2)On a aussi $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to+\infty} P(S_n^* < x) = \Phi(x)$.

3)On a enfin pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq S_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$,

$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq S_n^* < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$,

$\lim_{n\to+\infty} P(a < S_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$,

$\lim_{n\to+\infty} P(a < S_n^* < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

✓ Posons $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$. On peut vérifier que $(\overline{X_n})^* = S_n^*$ donc le théorème précédent reste valable en remplaçant S_n^* par $(\overline{X_n})^*$.

Propriété 3 (approximation de la loi de Poisson par la loi normale)

Si λ est assez grand, on peut approcher la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = \lambda$ et $\sigma^2 = \lambda$.

✓ Cette propriété s'applique en pratique pour $\lambda \geq 15$.

Exercice 6

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(16)$. Calculer une valeur approchée de $P(X = 10)$.

Propriété 4 (approximation de la loi binômiale par la loi normale)

Si n est grand et p voisin de 0,5 on peut approcher la loi $\mathscr{B}(n, p)$ par la loi $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = np$ et $\sigma^2 = npq$.

✓ Cette propriété s'applique en pratique pour $n \geq 30$ et $p \approx 0,5$.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$.

1)Quelle est la loi suivie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?

2)A l'aide du T.L.C, déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq np)$.